

A.1

A.1.1. ←

(a) & (b).  $C \equiv \cos \theta$ ,  $S \equiv \sin \theta$ , per brevità.

$$e^{i3\theta} = \cos 3\theta + i \sin 3\theta = (C + iS)^3 = (C^3 - 3CS^2) + i(3C^2S - S^3)$$

Usando  $C^2 + S^2 = 1$  e uguagliando parte reale e parte immaginaria,

$$\cos 3\theta = 4C^3 - 3C$$

$$\sin 3\theta = -4S^3 + 3S$$

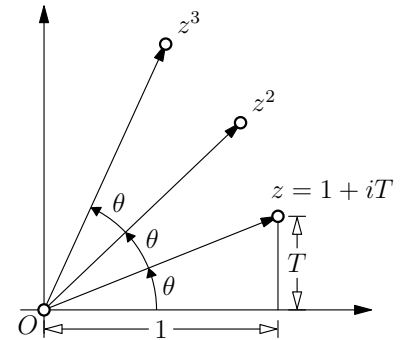
(c)  $2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ , da cui

$$\begin{aligned} 2^4 \cos^4 \theta &= (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4 \\ &= (e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}) + 4(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + 6 \\ &= 2 \cos 4\theta + 8 \cos 2\theta + 6 \\ \implies \frac{1}{8} (\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3) \end{aligned}$$

(d)  $T \equiv \tan \theta$ . Si rappresenti  $z = 1 + iT$  come nella figura a lato. Poiché  $z$  ha angolo  $\theta$ ,  $z^3$  ha angolo  $3\theta$ . Quindi,

$$\tan 3\theta = \frac{\operatorname{Im} z^3}{\operatorname{Re} z^3}$$

$$z^3 = (1 + iT)^3 = (1 - 3T^2) + i(3T - T^3) \implies \tan 3\theta = \frac{3T^2 - T^3}{1 - 3T^2}.$$



A.1.2. ←

$x = s + t$  nella cubica  $x^3 = 3px + 2q = 0$ :

$$\implies (s+t)^3 = 3p(s+t) + 2q \implies s^3 + 3s^2t + 3st^2 + t^3 = 3ps + 3pt + 2q$$

Se

$$\begin{cases} st = p \\ s^3 + t^3 = 2q \end{cases}$$

allora  $x$  risolve la cubica. Eliminando  $t$  dal sistema

$$s^3 + \frac{p^3}{s^3} = 2q \implies (s^3)^2 - 2q(s^3) + p^3 = 0 \implies s^3 = \begin{cases} q + \sqrt{q^2 - p^3} \\ q - \sqrt{q^2 - p^3} \end{cases}$$

Per simmetria

$$t^3 = \begin{cases} q + \sqrt{q^2 - p^3} \\ q - \sqrt{q^2 - p^3} \end{cases}$$

Dato che  $s^3 + t^3 = 2q$ , se  $s^3$  è la radice di sopra,  $t^3$  è quella di sotto.

Quindi,

$$x = s + t = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

## A.1.3. ←

$$|(a+ib)(c+id)|^2 = |(a+ib)|^2 |(c+id)|^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) \equiv MN$$

ma si ha anche

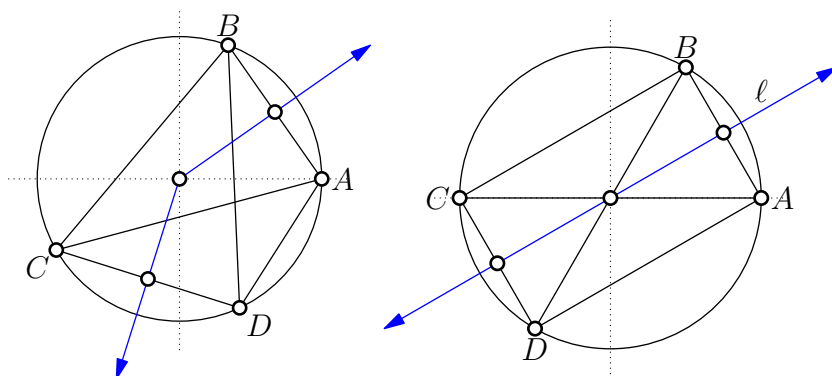
$$MN = |(a+ib)(c+id)|^2 = |(a+ib)(c+id)|^2 = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = p^2 + q^2.$$

## A.1.4. ←

Ci sono molti modi per risolvere questo problema. Si vuole mostrare che se i punti sono sul cerchio unitario e

$$A + B + C + D = 0 \quad (\text{A.1})$$

allora non si ha la configurazione a sinistra, ma quella a destra, della figura sotto:



La condizione (A.1) può essere riscritta come  $A + B = -(C + D)$  e significa, geometricamente, che i vettori congiungenti l'origine con i punti medi delle corde  $AB$  e  $CD$  stanno sulla stessa retta  $\ell$  (i vettori formano tra loro un angolo di  $180^\circ$ ). Poiché questi vettori sono sempre perpendicolari alle corde  $AB$  e  $CD$  (figura a sinistra), ne segue che, quando (A.1) è soddisfatta,  $AB$  e  $CD$  sono paralleli tra loro, perché ortogonali alla retta  $\ell$ . Il caso di un trapezio isoscele non può presentarsi perché (A.1) implica la stessa condizione per la congiungente le mediane di  $BC$  e  $DA$ , in quanto (A.1) può essere anche riscritta come  $B + C = -(A + D)$ .

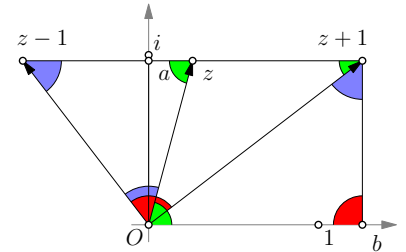
Naturalmente, è possibile anche una soluzione completamente algebrica. Qual è più facile?

Si osservi che, da un punto di vista fisico, (A.1) significa che il centro di massa dei punti (di massa uguale) è nell'origine. E se i punti stanno su un cerchio e inizialmente formano un rettangolo, come nella figura sopra a destra, non possono essere spostati lungo il cerchio e formare una configurazione come quella a sinistra, *se si*

vuole mantenere il centro di massa nell'origine. Con questo vincolo, i punti possono formare un altro rettangolo, ma non il quadrilatero irregolare della figura a sinistra.

**A.1.5.** ←

Per una soluzione geometrica, si veda la figura a lato. Si osservi che il triangolo  $[O, z + 1, z]$  è isoscele perché i lati  $[O, z]$  e  $[z + 1, z]$  sono di lunghezza 1 (essendo  $z$  sul cerchio unitario). Allora per il teorema di una retta che interseca due parallele, l'angolo  $[1, O, z + 1]$  è metà dell'angolo  $\theta = \arg(z)$ . Anche il triangolo  $[O, z - 1, z]$  è isoscele; ragionando sugli angoli si conclude che l'angolo  $[z, O, z + 1]$  è retto. Allora  $z - 1 = i\alpha(z + 1)$ . Si tratta adesso di determinare  $\alpha$ . Ragionando sui triangoli rettangoli simili  $[z - 1, O, z + 1]$  e  $[z + 1, b, O]$ , si ha la proporzione



$$|z - 1| : |z + 1| = |z + 1| \sin(\theta/2) : |z + 1| \cos \theta/2,$$

da cui  $|z - 1|/|z + 1| = \tan \theta/2$ . Dunque,

$$z - 1 = i \left( \tan \frac{\theta}{2} \right) (z + 1).$$

Il calcolo algebrico è immediato

$$\frac{z - 1}{z + 1} = \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})} = i \tan \frac{\theta}{2}.$$

**A.1.6.** ←

$$s_n \equiv 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}, \quad z s_n = z + z^2 + \dots + z^n = s_n - 1 + z^n$$

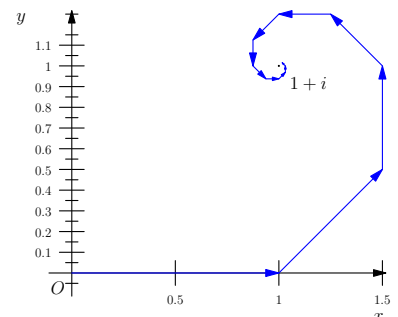
$$\implies 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

(a)  $|z| < 1$  (b)

$$\frac{-1}{z - 1} = \frac{1}{1 - z}$$

(c)

$$\frac{1}{1 - z} \Big|_{z=(1/2)(1+i)} = 1 + i$$

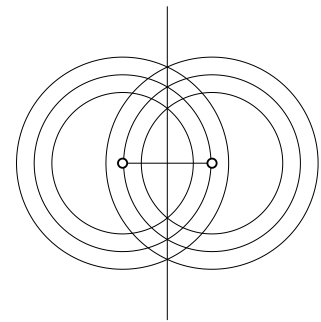


**A.1.7.** ←

$$\begin{aligned}
 S &= \cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \dots + \cos(2n-1)\theta \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} + e^{i3\theta} + e^{i5\theta} + \dots + e^{i(2n-1)\theta} \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left[ 1 + (e^{i\theta}) + (e^{i\theta})^2 + \dots + (e^{i\theta})^{n-1} \right] \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left[ \frac{e^{i2n\theta} - 1}{e^{i2\theta} - 1} \right] \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left[ \frac{e^{in\theta} (e^{in\theta} - e^{-in\theta})}{e^{i\theta} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})} \right] \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ e^{in\theta} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \right\} \\
 &= \frac{\sin n\theta \cos n\theta}{\sin \theta} \\
 &= \frac{\sin 2n\theta}{2 \sin \theta}
 \end{aligned}$$

**A.1.8.** ←

Luogo dei punti equidistanti da due punti dati. Vedere la figura a lato.



**A.1.9.** ←

(a) Sulla retta perpendicolare al segmento tra  $(0,0)$  e  $(1,0)$  e passa a metà (vedere problema precedente, l'identità deve vale anche per i moduli). Nove radici perchè  $z^{10}$  compare da ambo i membri el'equazione si abbassa il grado.

(b)  $w^{10} = 1 \implies w_1 = 1, w_2 = e^{i\frac{2\pi}{10}}, \dots, w_{10} = e^{i\frac{9\pi}{10}}$

$$z_n = \frac{1}{1 - w_n}, \quad n = 2, 3, \dots, 10 \quad (\text{N.B. } w_1 \text{ va esclusa}).$$

**A.1.10.** ←

L'effetto della trasformazione  $z \mapsto z^2$  sul cerchio unitario centrato in  $(1,0)$  (in nero) è mostrato nella figura a lato. Le equazioni della cardioide (in rosso), sono

$$|z^2 - 1| = 1$$

Poiché le equazioni parametriche del cerchio di partenza sono

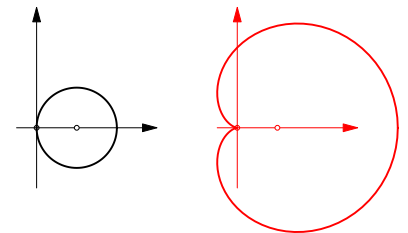
$$z = 1 + e^{it}$$

quelle della cardioide saranno

$$z = (1 + e^{it})^2 = 1 + 2e^{it} + e^{i2t}$$

Raccongiendo  $e^{it}$  a secondo membro,

$$z = e^{it}(e^{-it} + 2 + e^{it}) = 2e^{it}(1 + \cos t),$$



da cui segue immediatamente l'equazione in coordinate polari:

$$r = 2(1 + \cos \theta).$$

**A.1.11.** ←

(i) Sia

$$w = M_a(z) = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}$$

L'idempotenza segue dal calcolo algebrico elementare:

$$\begin{aligned} M_a(M_a(z)) &= M_a(w) = \frac{w - a}{\bar{a}w - 1} = \frac{\frac{z-a}{\bar{a}z-1} - a}{\bar{a}\frac{z-a}{\bar{a}z-1} - 1} \\ &= \frac{z - a - a\bar{a}z + a}{\bar{a}z - \bar{a}a - \bar{a}z + 1} = \frac{z(1 - a\bar{a})}{1 - \bar{a}a} \\ &= z \end{aligned}$$

(ii) Consideriamo il modulo di  $M_a(z)$

$$|M_a(z)| = \left| \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \right| = \frac{|z - a|}{|\bar{a}z - 1|}$$

Per i quadrati di numeratore e denominatore si ha rispettivamente

$$\begin{aligned} |z - a|^2 &= |z|^2 - \bar{a}z - \bar{z}a + |a|^2 \\ |\bar{a}z - 1|^2 &= |a|^2|z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + 1 \end{aligned}$$

Se  $|z| = 1$ , queste due quantità sono uguali e quindi  $|M_a(z)| = 1$ . Il cerchio  $|z| = 1$  è trasformato in sè stesso.

(iii) Si verifica infine che se  $|a| < 1$ ,  $M_a$  rappresenta il disco unitario in sè stesso. Sottraendo membro a membro i quadrati di numeratore e denominatore, si ottiene

$$|z - a|^2 - |\bar{a}z - 1|^2 = (1 - |a|^2)(|z|^2 - 1) < 0 \quad \text{quando} \quad |z| < 1, |a| < 1.$$

Quindi  $|z - a| < |\bar{a}z - 1|$ , da cui

$$|M_a(z)| = \frac{|z - a|}{|\bar{a}z - 1|} < 1 \quad \text{quando} \quad |z| < 1, |a| < 1.$$

e quindi  $M_a(z)$  sta dentro il disco unitario.

**A.1.12.** ←

Le trasformazioni

$$z \mapsto M_{a,b,c,d}(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

svolgono un ruolo importante in geometria e analisi complessa e sono dette *trasformazioni di Möbius* (che ne studio per primo le proprietà). Nel seguito, per brevità, ometteremo di indicare i quattro parametri reali e scriveremo semplicemente  $M$ .

Per dimostrare che

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

trasforma linee e cerchi in linee e cerchi, facciamo il calcolo per un caso particolare e poi argomentiamo che fare questo è sufficiente.

Se  $c = 0$  allora

$$z \mapsto (a/d)z + (b/d)$$

è la moltiplicazione per un numero complesso,

$$z \mapsto w = (a/d)z,$$

(una *stiro-rotazione*, secondo la terminologia introdotta nella sezione. 1.3) seguita da una traslazione

$$w \mapsto w + (b/d).$$

È quindi geometricamente chiaro che linee e cerchi vanno in linee e cerchi.

Se  $c \neq 0$ , scriviamo

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \frac{1}{cz + d}.$$

Questa trasformazione è la composizione di 5 trasformazioni:

$$z \xrightarrow{(1)} w_1 = cz \xrightarrow{(2)} w_2 = w_1 + d \xrightarrow{(3)} w_3 = \frac{1}{w_2} \xrightarrow{(4)} w_4 = -\frac{ad - bc}{c} w_3 \xrightarrow{(5)} w_5 = w_4 + \frac{a}{c}$$

(1) stiro-rotazione

(2) traslazione

(3) inversione complessa

(4) stiro-rotazione

(5) traslazione

Le stiro-rotazioni e le traslazioni trasformano linee e cerchi in linee e cerchi, se mostriamo che lo stesso vale per l'inversione complessa siamo a posto.

L'equazione di un cerchio è

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + 2\beta x - 2\gamma y + \delta = 0$$

e per  $\alpha = 0$  si ha l'equazione di una linea retta. In notazione complessa l'equazione diventa

$$\alpha |z|^2 + \beta(z + \bar{z}) + i\gamma(z - \bar{z}) + \delta = 0$$

Poniamo  $w = 1/z$  e sostituiamo

$$\alpha \frac{1}{|w|^2} + \beta \left( \frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} \right) + i\gamma \left( \frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} \right) + \delta = 0$$

Moltiplichiamo per  $|w|^2 = \bar{w}w$  e otteniamo

$$\alpha + \beta(w + \bar{w}) - i\gamma(w - \bar{w}) + \delta|w|^2 = 0$$

che è ancora l'equazione di un cerchio (dove si è spostato il centro? come è variato il raggio?).

Facciamo il punto sulle trasformazioni di Möbius

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Ciascuna di esse è la composizione delle seguenti trasformazioni:

- (i) stiro-rotazione = moltiplicazione per il numero complesso  $a$ ,  
 $S_a(z) = az$
- (ii) traslazione = somma del numero complesso  $b$ ,  $T_b(z) = z + b$
- (iii) inversione complessa  $\mathcal{I}^C(z) = 1/z$

Allora

$$M = T_{(a/c)} \circ S_{[-(ad-bc)/c]} \circ \mathcal{I}^C \circ T_d \circ S_c$$

dove, come di consueto, "o" denota la composizione di funzioni.

*Nota* La trasformazione

$$\mathcal{I}^G : z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$$

è usualmente detta *inversione geometrica* o *inversione per raggi vettori reciproci nel piano* o semplicemente *inversione*. Come si vede facilmente, anch'essa trasforma linee e cerchi in linee e cerchi.