

A.2

A.2.1. □

Per prima cosa si osservi che lo sviluppo in serie di $1/(a-x)$, visto nella sezione 2.3, si estende a $1/(a-z)$, per z complesso, cioè

$$\frac{1}{a-z} = \sum_k \frac{Z^k}{(a-u)^{k+1}} \quad \text{sse } |Z| < |a-u| \quad \text{e } Z \equiv z-u \quad (\text{A.2})$$

Procedendo come per $1/(1-x^2)$, si ottiene

$$h(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{-i-z} - \frac{1}{i-z} \right]$$

Applicando (A.2) a entrambi i termini a secondo membro si ottiene

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{(-i-u)^{k+1}} - \frac{1}{(i-u)^{k+1}} \right] Z^k \quad (\text{A.3})$$

Siamo interessati a u e x reali:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{(-i-u)^{k+1}} - \frac{1}{(i-u)^{k+1}} \right] (x-u)^k \quad (\text{A.4})$$

Poiché u è reale, $|i-u| = \sqrt{1+u^2}$ e possiamo scrivere $i-u = \sqrt{1+u^2}e^{i\phi}$ dove $\phi = \arg(i-u)$. Similmente, essendo u reale, abbiamo $-i-u = \sqrt{1+u^2}e^{-i\phi}$. Quindi

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(k+1)\phi}{(\sqrt{1+u^2})^{k+1}} \right] (x-u)^k. \quad (\text{A.5})$$

da cui segue che il raggio di convergenza è

$$R = \sqrt{1+u^2}.$$

A.2.2. □

(i) La serie geometrica

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge a $\frac{1}{1-z}$ per $|z| < 1$. Sul cerchio $|z| = 1$ diverge (i termini della serie non vanno a zero). (Per approfondimenti sulla serie geometrica, si veda il complemento alla fine del capitolo 2).

(ii) La serie

$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

converge per $|z| < 1$. Sul cerchio $|z| = 1$, per alcuni punti converge e per altri no; ad esempio, diverge per $z = 1$ (serie armonica); converge per $z = -1$ (infatti, $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots = \ln 2$).

(iii) La serie

$$z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{9} + \frac{z^4}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

converge *assolutamente* per $|z| \leq 1$ (quindi anche sul disco unitario).

Per quel che riguarda (ii), non era richiesto uno studio della convergenza per tutti i punti del cerchio e la risposta data sopra è considerata sufficiente (da chi ha assegnato il problema!). Tuttavia, per completezza, facciamo questo studio.

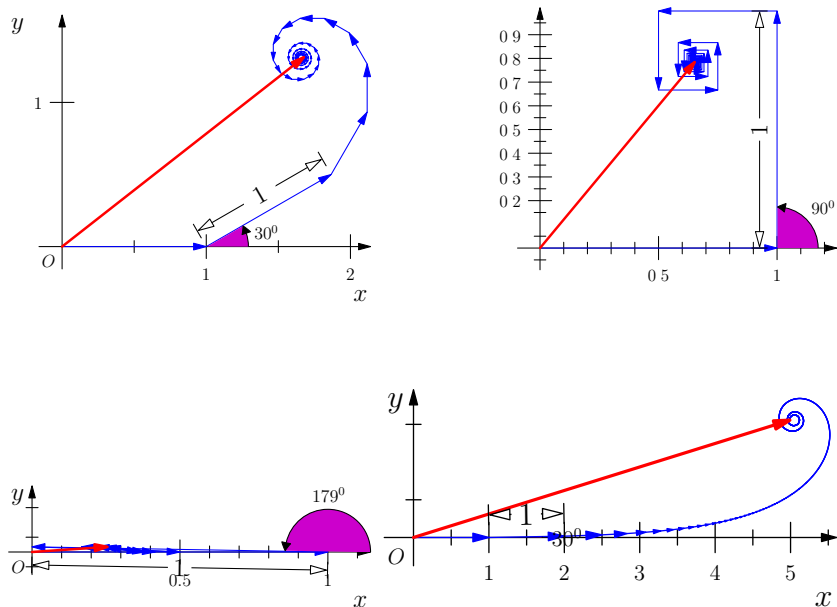
Per z sul cerchio, $z = e^{i\theta}$ e la serie diventa

$$e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{2i\theta} + \frac{1}{3}e^{3i\theta} + \frac{1}{4}e^{4i\theta} + \dots \quad (\text{A.6})$$

Non sembra azzardato scommettere sulla convergenza di questa serie. Poichè $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$ converge, lo stesso potrebbe essere vero per (A.6): dopo tutto, al variare di n , i termini

$$e^{ni\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

hanno anch'essi alternanze di segno che potrebbero essere tali da produrre le compensazioni giuste e quindi la convergenza. Ma questa è pura speculazione! Un'evidenza ben più solida proviene dall'analisi numerica della convergenza della serie. Ecco quattro grafici che si ottengono studiando numericamente la serie per diversi valori dell'angolo:



Il primo in alto a sinistra è per $\theta = 30^\circ$, il secondo in alto per $\theta = 90^\circ$. L'analisi numerica di $\theta = 180^\circ$ non dà buoni frutti: la convergenza è estremamente lenta. Comunque, teoricamente, sappiamo che la serie converge a $\ln 2$. La prima figura sotto a sinistra illustra il caso $\theta = 179^\circ$, quella a destra, $\theta = 1^\circ$; per $\theta = 0$ sappiamo che la serie diverge (serie armonica). Le serie sono state troncate al grado n del polinomio per cui si ha stabilità numerica della somma (vettore rosso).

La congettura che la serie (A.6) converga ha dunque solide basi numeriche. Tuttavia, i criteri usuali, applicati ciecamente, falliscono, in quanto coinvolgono il modulo dell' n -esimo termine della serie, e il modulo non distingue tra la serie (A.6) e la serie armonica, che diverge.

Quando si è in difficoltà conviene *sempre* ragionare partendo dai principi primi. In questo caso dalla definizione stessa di serie convergente—la serie converge se la successione delle somme parziali converge—e dal criterio di base di convergenza, il criterio di Cauchy.

Consideriamo le somme parziali n -esima e m -esima ($n > m$).

$$S_m = e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{2i\theta} + \frac{1}{3}e^{3i\theta} + \dots + \frac{1}{m}e^{mi\theta} \quad (\text{A.7})$$

$$S_n = S_m + \frac{1}{m+1}e^{(m+1)i\theta} + \dots + \frac{1}{n}e^{ni\theta} \quad (\text{A.8})$$

Se prendiamo la differenza delle sue somme

$$S_n - S_m = \frac{1}{m+1}e^{(m+1)i\theta} + \dots + \frac{1}{n}e^{ni\theta} \quad (\text{A.9})$$

e poi stimiamo il modulo, siamo punto e daccapo perché *l'unico modo* che abbiamo per stimare il modulo di una somma (a meno che non siamo in grado di calcolarla esplicitamente, come è il caso per la progressione geometrica!) è

$$|z_1 + \dots + z_p| \leq |z_1| + \dots + |z_p| \quad (\text{A.10})$$

Possiamo tuttavia sfruttare la possibilità di moltiplicare (A.7) e (A.8) per un numero α dipendente da θ , in modo che

$$|\alpha S_n - \alpha S_m|$$

dia qualcosa che, stimato con la (A.10), possa essere reso più piccolo di un qualunque ϵ , per n e m sufficientemente grandi. Dopo vari tentativi ed errori, si scopre che $\alpha = (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})$ fornisce proprio

quello che si vuole. Infatti,

$$\begin{aligned} \alpha(S_n - S_m) &= \frac{1}{m+1} e^{(m+1+\frac{1}{2})i\theta} + \frac{1}{m+2} e^{(m+2+\frac{1}{2})i\theta} + \dots + \frac{1}{n-1} e^{(n-1+\frac{1}{2})i\theta} + \frac{1}{n} e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} \\ &\quad \searrow \qquad \qquad \qquad \searrow \qquad \qquad \qquad \searrow \\ &= \frac{1}{m+1} e^{(m+1-\frac{1}{2})i\theta} - \frac{1}{m+2} e^{(m+2-\frac{1}{2})i\theta} - \dots - \frac{1}{m-1} e^{(m-1+\frac{1}{2})i\theta} - \frac{1}{n} e^{(n-\frac{1}{2})i\theta} \\ &= e^{(m+1+\frac{1}{2})i\theta} \left[\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right] + \dots + e^{(n-1+\frac{1}{2})i\theta} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right] \\ &\quad + \frac{1}{n} e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - \frac{1}{m+1} e^{(m+1-\frac{1}{2})i\theta} \end{aligned}$$

da cui, applicando la (A.10),

$$\begin{aligned} |\alpha(S_n - S_m)| &\leq \left[\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right] + \dots + \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right] + \frac{1}{n} + \frac{1}{m+1} \\ &= \frac{2}{m+1} \end{aligned}$$

quindi, per n e m sufficientemente grandi, $|S_n - S_m|$ è più piccolo di un qualunque ϵ . Risulta così dimostrato che la serie (A.6) converge nell'intervallo aperto $\theta \in (0, 2\pi)$ [che in $\theta = 0$ diverga, era già stato stabilito].

A.2.3. □

Polinomio approssimante

$$P_m(z) = \sum_{k=0}^m z^k$$

(a) Errore: $E_m(z) \equiv |P(z) - P_m(z)|$

$$E_m(z) = |P(z) - P_m(z)| = |z^{m+1} + z^{m+2} + \dots| = \frac{|z|^{m+1}}{|1-z|}$$

(perché per $S \equiv z^{m+1} + z^{m+2} + \dots$ si ha $S = z(z^m + S)$)

(b) Per $|z| < 1$, $E_m(z) \rightarrow 0$ per $m \rightarrow \infty$.

(c) Per m fissato $E_m(z) \rightarrow \infty$ per $z \rightarrow 1$. Per $|z| \rightarrow 1$, $z = e^{i\theta}$, $\theta \neq 0$ si ha

$$E_m(z) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}$$

(d) Per $|z| \leq r = 0.9$

$$E_m(z) \leq \frac{r^{m+1}}{1-r} = \frac{0.9^{m+1}}{0.1} = \epsilon = 0.01 \quad \Rightarrow \quad m \approx 67$$

[Nota. Risulta così dimostrato che la serie geometrica converge *uniformemente* nel disco di raggio r . La nozione di convergenza uniforme è trattata nel capitolo 3.]

A.2.4. □ (4.5) Dalla trigonometria (o dalla formula di Eulero):

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A - B) + \sin(A + B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \cos n\theta \, d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m - n)\theta + \sin(m + n)\theta] \, d\theta = 0 \quad \text{per } m \neq n \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2n\theta \, d\theta = 0 \quad \text{per } m = n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m - n)\theta + \cos(m + n)\theta] \, d\theta = 0 \quad \text{per } m \neq n \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2n\theta] \, d\theta = \pi \quad \text{per } m = n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \sin n\theta \, d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m - n)\theta - \cos(m + n)\theta] \, d\theta = 0 \quad \text{per } m \neq n \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos 2n\theta] \, d\theta = \pi \quad \text{per } m = n \end{aligned}$$

Adesso, tenuto conto di queste uguaglianze, integriamo ambo i membri della (4.5) tra $-\pi$ e π . Otterremo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \, d\theta = 2\pi a_0$$

Moltiplichiamo poi ambo i membri della (4.5) per $\cos m\theta$ e integriamo ancora tra $-\pi$ e π . Otterremo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos m\theta \, d\theta = \pi a_m.$$

Questo perché l'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos m\theta \, d\theta$ è nullo e sono pure nulli gli integrali $\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta$ ($n \neq m$) e $\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin n\theta \cos m\theta \, d\theta$.

Moltiplichiamo infine ambo i membri della (4.5) per $\sin m\theta$ e integriamo tra $-\pi$ e π . Otterremo analogamente

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin m\theta \, d\theta = \pi b_m.$$