

A.3

A.3.1. ←

Poiché la somma dei primi n termini della serie è

$$\begin{aligned} S_n(z) &= z(1-z) + z^2(1-z) + \dots + z^n(1-z) \\ &= z - z^2 + z^2 - z^3 + \dots + z^n - z^{n+1} \\ &= z - z^{n+1} \end{aligned}$$

dal problema 1.6 segue che

$$S(z) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = z \quad \text{per ogni } z \text{ tale che } |z| < 1$$

(incluso $z = 0$, dove la serie vale 0). Alternativamente, una dimostrazione autosufficiente è la seguente: $|S_n(z) - z| = |-z^{n+1}| = |z|^{n+1} < \epsilon$ per $(n+1) \ln |z| < \ln \epsilon$, cioè

$$n+1 > \frac{\ln \epsilon}{\ln |z|} \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |z|} - 1 \quad \text{se } z \neq 0$$

Se $z = 0$, $S_n(0) = 0$ e $|S_n(0) - 0| < \epsilon$ per ogni n . Quindi, la somma della serie è

$$S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = z \quad \text{per ogni } z \text{ tale che } |z| < 1 \text{ (incluso } z = 0\text{)}$$

A.3.2. ←

La serie converge per $\operatorname{Re}(z) > -1/2$. Infatti, è una serie geometrica e converge quando

$$\left| \frac{z}{1+z} \right| < 1$$

cioè quando

$$|z| < |1+z|.$$

Passando alle usuali coordinate cartesiane $z = x + iy$, la condizione diventa

$$x^2 + y^2 < 1 + 2x + x^2 + y^2,$$

da cui

$$x = \operatorname{Re}(z) > -\frac{1}{2}.$$

Si osservi che in questo caso la serie, non essendo una serie di potenze, non ha necessariamente un dominio di convergenza rappresentato da un cerchio. Infatti, il dominio di convergenza è il semipiano limitato a sinistra dalla retta $\operatorname{Re}(z) = -1/2$.

A.3.3. ←

(a) Nel problema 3.1 si è dimostrato che

$$|S_n(z) - z| < \epsilon \quad \text{per ogni } n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |z|} - 1 \quad \text{se } |z| < 1.$$

Quindi, a fortiori, la serie converge per $z \leq 1/2$. Ora, se $z \leq 1/2$ il massimo valore dell'errore si ha quando $|z| = 1/2$ ed è dato da

$$N^* = \frac{\ln \epsilon}{\ln(1/2)} - 1$$

Ne segue che $|S_n(z) - z| < \epsilon$ per ogni $n > N^*$, dove N^* dipende solo da ϵ e non dal particolare valore di z dentro $|z| \leq 1/2$.

(b). La stessa argomentazione fatta in (a) serve a dimostrare che la serie converge alla somma z per $|z| \leq 0.9$ o $|z| \leq 0.99$, usando rispettivamente

$$N^* = \frac{\ln \epsilon}{\ln(0.9)} - 1 \quad \text{e} \quad N^* = \frac{\ln \epsilon}{\ln(0.99)} - 1$$

È chiaro che non si può estendere la dimostrazione a $|z| \leq 1$, perché ciò richiederebbe

$$N^* = \frac{\ln \epsilon}{\ln(1)} - 1,$$

che è infinito, non esiste cioè un valore finito di N^* che possa essere impiegato in questo caso. Quindi per $|z| \leq 1$ la serie non converge uniformemente.

A.3.4. ←

(a) Si ha

$$\left| \frac{1}{1+nz} - 0 \right| < \epsilon \quad \text{per} \quad \frac{1}{|1+nz|} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |1+nz| > \frac{1}{\epsilon}.$$

Ora,

$$|1+nz| \leq |1| + |nz| = 1 + n|z| \quad \text{e} \quad 1 + n|z| \geq \frac{1}{\epsilon} \quad \text{per} \quad n > \frac{1/\epsilon - 1}{|z|}$$

Quindi per $|z| > 2$ la successione converge a 0.

Per dimostrare che converge uniformemente a 0, si osservi che il massimo valore di

$$\frac{1}{|z|} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right)$$

in $|z| > 2$ si ha per $|z| = 2$ ed è dato da

$$N^* = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right).$$

ne segue che

$$\left| \frac{1}{1+nz} - 0 \right| < \epsilon$$

per ogni $n > N^*$, dove N dipende solo da ϵ e non dal particolare z in $|z| > 2$. Quindi la successione è uniformemente convergente a zero in questa regione.

(b) Se δ è un numero positivo qualsiasi, il massimo di

$$\frac{1}{|z|} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right)$$

in $z \leq \delta$ si ha per $|z| = \delta$ ed è

$$\frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right)$$

Come in (a) ne segue che la successione converge uniformemente a zero per ogni z per cui $|z| \geq \delta$, cioè in ogni regione che non comprenda punti di un intorno di $z = 0$. Poiché δ è arbitrario, questa regione può essere arbitrariamente piccola (ma non ridursi ad un punto).

A.3.5. ←

Dal problema 3.1,

(a) $S_n(z) = z - z^{n+1}$, $S(z) = \lim S_n(z)$. Se $|z| < 1$, $S(z) = z$. Se $z = 1$, $S_n(z) = S_n(1) = 0$ e $\lim S_n(1) = 0$. Quindi $S(z)$ è discontinua in $z = 1$.

(b) Dal problema 3.4, se si scrive

$$u_n(z) = \frac{1}{1+nz} \quad \text{e} \quad U(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z),$$

si ha $U(z) = 0$ se $z \neq 0$ e $U(0) = 1$. Quindi $U(z)$ è discontinua in $z = 0$.

A.3.6. ←

La serie non è di potenze. Forniamo una dimostrazione diretta. Sia

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n(z) &= |z(1-z)| + |z^2(1-z)| + \dots + |z^n(1-z)| \\ &= |1-z| \left[|z| + |z|^2 + \dots + |z|^n \right] \\ &= |1-z||z| \left[\frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|} \right]. \end{aligned}$$

Se $|z| < 1$, $|z|^n$ tende a zero per n che va all'infinito: il limite di $\tilde{S}_n(z)$ esiste e la serie è assolutamente convergente. (Si osservi che la serie dei valori assoluti converge a $(|z||1-z|)/(1-|z|)$.)

A.3.7. ←

Se $|z| \leq 1$,

$$\left| \frac{z^n}{n(n+1)} \right| = \frac{|z|^n}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

Poiché $\sum (1/n^2)$ converge, per confronto segue l'assoluta convergenza della serie.

A.3.8. ←

Poiché

$$\frac{z^n}{n\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n^{3/2}},$$

per $|z| \leq 1$, la serie data converge uniformemente (e assolutamente) per il criterio M di Weirstrass.

A.3.9. ←

La serie data è

$$\frac{1}{1^2 + z^2} + \frac{1}{2^2 + z^2} + \frac{1}{3^2 + z^2} + \dots$$

I primi due termini possono essere omessi senza influenza sulla convergenza uniforme della serie. Per $n \geq 3$ e $1 < |z| < 2$, si ha

$$|n^2 + z^2| \geq |n^2| - |z^2| \geq n^2 - 4 \geq \frac{1}{2}n^2 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{n^2 + z^2} \right| \leq \frac{2}{n^2}$$

Allora la serie data converge uniformemente (e assolutamente) in $1 < |z| < 2$ per il criterio M di Weirstrass.

Si noti che la convergenza, e quindi anche l'uniforme convergenza, viene meno per $|z| = 1$ o $|z| = 2$ (precisamente in $z = \pm i$ e $z = \pm 2i$).

A.3.10. ←

La funzione $\cos nz$ è ovunque limitata sull'asse reale, ma non sull'asse immaginario:

$$\begin{aligned} \cos nz &= \frac{1}{2} [e^{inz} - e^{-inz}] \\ &= \frac{1}{2} [e^{in(x+iy)} - e^{-in(x+iy)}] \\ &= \frac{1}{2} [e^{-ny}e^{inx} - e^{ny}e^{-inx}] \end{aligned}$$

Quindi, per $n \rightarrow \infty$, $\cos nz$ esplode esponenzialmente sia sull'asse immaginario positivo sia su quello negativo, fatta eccezione per $y = 0$. Se ne conclude che la serie data non converge in $|z| \leq 1$ (on in qualunque disco $|z| \leq r < 1$). La serie converge solo sull'asse reale ($y = 0$), e vi converge uniformemente (criterio M di Weirstrass).

A.3.11. ←

La serie è geometrica (non di potenze) con primo termine $1/(1-z)$ e ragione $2z/(1-z)$. Converge quando

$$|2z| < |1-z|,$$

cioè quando z è dentro al cerchio d'equazione

$$3x^2 + 3y^2 + 2x - 1 = 0.$$

A.3.12. ←

Lasciato alla fantasia.

A.3.13. ←

La serie binomiale è

$$B_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} z^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Con il metodo del rapporto si ottiene

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_k|}{|c_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{|n-k|} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{k}}{\left|1 - \frac{n}{k}\right|} = 1$$