

1.4

1.4.1. □ La multifunzione

$$f(z) = \sqrt{z+1} \sqrt[3]{z-i}$$

è il prodotto di 2 multifunzioni  $Z \mapsto \sqrt{Z}$  e  $W \mapsto \sqrt[3]{W}$ . È quindi ragionevole supporre che  $Z = 0$ , cioè  $z = -1$  e  $W = 0$ , cioè  $z = i$  siano punti di diramazione di  $f$ .

Con riferimento alla figura a lato, e tenuto conto dell'esempio analogo della sezione. 4.2), poniamo

$$z = -1 + r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{e} \quad z = i + r_2 e^{i\theta_2}$$

da cui

$$f(z) = w = \sqrt{z+1} \sqrt[3]{z-i} = \sqrt{r_1} \sqrt[3]{r_2} e^{i(\theta_1/2 + \theta_2/3)} = \sqrt{r_1} \sqrt[3]{r_2} e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/3}$$

questo corrisponde alla scelta di uno dei valori di  $f$  in  $z$ . Per dimostrare che  $i$  è un punto di diramazione, consideriamo un cammino chiuso attorno a  $i$ . I dettagli della curva sono irrilevanti: conta soltanto la variazione angolare (cerchio rosso della figura). Dopo un giro completo si ha

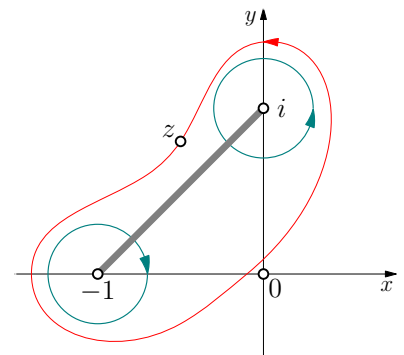
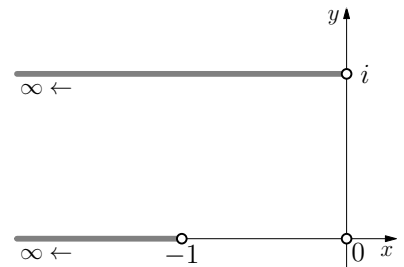
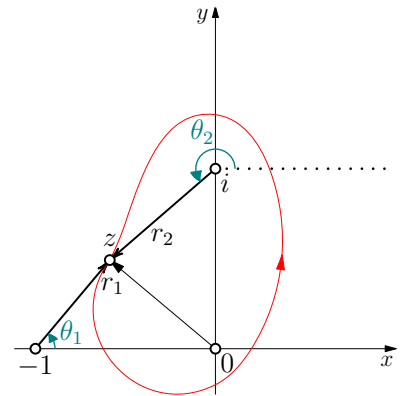
$$e^{i\theta_2/3} \rightsquigarrow e^{i(\theta_2/3 + 2\pi/3)},$$

cioè la radice ha cambiato valore ed è passata nel suo secondo ramo. Mentre  $z$  compie un giro attorno a  $i$ , l'angolo  $\theta_1$  va avanti e indietro: raggiunge un valore massimo a sinistra e poi, quando  $z$  ritorna al suo valore iniziale, anch'esso ritorna al suo valore iniziale. Quindi complessivamente  $f(z)$  varia in un giro completo per la sola variazione dovuta alla sola radice cubica. Fine della dimostrazione che  $i$  è un punto di diramazione. Analogo ragionamento per  $-1$  porta alla conclusione che anche  $-1$  è un punto di diramazione. Poiché ci vogliono due giri per tornare al valore iniziale,  $z = -1$  è un punto di diramazione semplice; per  $i$  ce ne vogliono tre e dunque è di ordine 2.

I tagli standard per ottenere rami ad un sol valore dalla funzione di partenza sono mostrati nella figura a lato. Non è possibile ottenere rami ad un sol valore con il solo taglio congiungente i punti di diramazione perchè pur essendo le "velocità angolari" opposte in senso di rotazione sono di diverso modulo (una è  $1/2$  e l'altra è  $1/3$ ), e non ci può essere compensazione dopo un giro completo. Si veda la figura a lato.

1.4.2. □  $f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{z-1} \sqrt{z+1}$ , al finito, ha due punti di diramazione semplici in  $z = \pm 1$ . Per valutare se  $f(z)$  ha un punto di diramazione all'infinito, si considera  $F(z) = f(1/z)$  per  $z = 0$ . Ma

$$F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{z^2}} \sqrt{1 - z^2} = \frac{1}{z} \sqrt{1 - z^2}.$$



Quindi  $z = 0$  non è un punto di diramazione di  $F$  e di conseguenza  $z = \infty$  non è un punto di diramazione di  $f$ .

**1.4.3.** □ (a)  $f(z) = \sin \sqrt{z}$ . Se si considera un giro attorno a 0 lungo il cerchio unitario  $|z| = 1$ , partendo, per esempio, da  $\theta = 0$ , si ha:

$$\sin e^{i(\theta=0)/2} = \sin(1) \implies \sin e^{i(\theta=2\pi)/2} = \sin e^{i\pi} = \sin(-1) = -\sin(1)$$

Quindi  $\sin \sqrt{z}$  ha un punto di diramazione semplice nello zero. Poiché un giro lungo  $|z| = 1$  è anche un giro attorno all'infinito, anche l'infinito è un punto di diramazione della funzione.

(b)  $f(z) = \sqrt{\sin z}$ . Il seno si annulla per  $z = n\pi$  ed è singolare all'infinito. Ci potrebbero essere dei punti di diramazione in questi punti. Consideriamo il punto  $z = n\pi$ . Possiamo scrivere

$$\sin z = (z - n\pi) \frac{\sin z}{z - n\pi}.$$

La funzione

$$g(z) = \frac{\sin z}{z - n\pi}$$

è non nulla e non ha una "vera" singolarità in  $z = n\pi$ , in quanto<sup>1</sup>

$$\lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{\sin z}{z - n\pi} = \lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{\cos z}{1} = (-1)^n$$

<sup>1</sup> Quando la singolarità è solo apparente e può essere "eliminata" si dice appunto *singolarità eliminabile*.

Allora, in un piccolo intorno di  $n\pi$  si ha

$$\sin z = (z - n\pi)(-1)^n$$

Quindi, poiché  $\sqrt{z - n\pi}$  ha un punto di diramazione semplice per  $z = n\pi$  anche  $\sqrt{\sin z}$  avrà un punto di diramazione semplice per  $z = n\pi$ .

Poiché tutti i punti di diramazione  $z = n\pi$  vanno fino all'infinito, l'infinito non è una singolarità isolata, ma un punto di accumulazione di singolarità. Un punto di diramazione deve essere una singolarità isolata e quindi l'infinito non è un punto di diramazione.

(c)  $f(z) = \sqrt{z} \sqrt{\sin z}$ . La funzione è a un sol valore. Dimostrazione veloce:

$$\begin{aligned} z^{1/2} \sin z^{1/2} &= \pm \sqrt{z} \sin(\pm \sqrt{z}) \\ &= \pm \sqrt{z} (\pm \sin(\sqrt{z})) \\ &= \sqrt{z} \sin \sqrt{z} \end{aligned}$$

(d)  $f(z) = \sqrt{\sin z^2}$ . Poiché  $\sin z^2 = 0$  per  $z = (n\pi)^{1/2}$ , questi potrebbero essere punti di diramazione. Possiamo scrivere

$$\sin z^2 = z^2 \frac{\sin z^2}{z^2}$$

dove la funzione  $\sin z^2/z^2$  è non nulla e ha una singolarità eliminabile per  $z = 0$ : per  $z \rightarrow 0$  la funzione tende a 1. Poichè  $\sqrt{z^2}$  non ha un punto di diramazione in 0, lo stesso vale per  $f(z)$ . Consideriamo adesso il punto  $z = (n\pi)^{1/2}$ ,

$$\sin z^2 = (z - \sqrt{n\pi}) \frac{\sin z^2}{z - \sqrt{n\pi}}$$

$\sin z^2/(z - \sqrt{n\pi})$  è non nulla e ha una singolarità eliminabile per  $z = \sqrt{n\pi}$

$$\lim_{z \rightarrow \sqrt{n\pi}} \frac{\sin z^2}{z - \sqrt{n\pi}} = \lim_{z \rightarrow \sqrt{n\pi}} \frac{2z \cos z^2}{1} = 2\sqrt{n\pi}(-1)^n$$

Poiché  $(z - \sqrt{n\pi})^{1/2}$  ha un punto di diramazione in  $z = \sqrt{n\pi}$ , anche  $\sqrt{\sin z^2}$  lo avrà. Quindi  $f(z) = \sqrt{\sin z^2}$  ha punti di diramazione semplici in  $z = \sqrt{n\pi}$  per  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Il punto all'infinito non è una singolarità isolata.<sup>2</sup>

**1.4.4.** □ Per trovare i punti di diramazione di

$$f(z) = \sqrt[3]{z^3 - z}$$

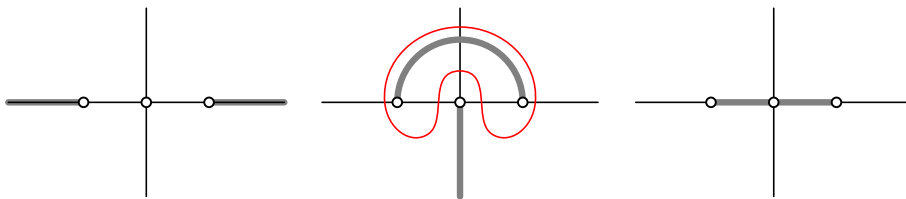
espandiamo  $f(z)$ ,

$$f(z) = z^{1/3}(z-1)^{1/3}(z+1)^{1/3}$$

Ci sono punti di diramazione di ordine 2 in  $z = -1, 0, 1$ . Facendo la sostituzione  $z \mapsto 1/z$  si vede che non ci sono punti di diramazione all'infinito in quanto

$$F(z) = f(1/z) = \frac{1}{z}(1-z)^{1/3}(1+z)^{1/3}$$

Ci sono tre possibili tagli:



Si vede facilmente che il primo taglio va bene e trasforma la multifunzione in una funzione a un solo valore. Il secondo taglio NON va bene perché permette un giro intorno ai punti  $\pm 1$ . Un giro intorno a questi due punti fa variare il valore di partenza della funzione di un fattore  $e^{i4\pi/3}$ , quindi la funzione così ottenuta non è a un solo valore. Il terzo taglio va bene: girando intorno ai tre tagli la funzione non cambia ( $e^{i6\pi/3} = e^{i2\pi} = 1$ ); si osservi che questo è anche conseguenza diretta del fatto che l'infinito non è un punto di diramazione.

<sup>2</sup> E poichè non è neanche un polo, è una singolarità essenziale (le definizioni di polo e di singolarità essenziale saranno date in una lezione successiva).

1.4.5. □ Per prima cosa fattorizziamo  $f(z)$ ,

$$f(z) = (z - i)^{1/3}(z + i)^{1/3}.$$

Ci sono punti di diramazione (di ordine 2) in  $z = \pm i$ . Scegliamo in tagli secondo la convenzione standard, come nella figura a lato. Si ha

$$f(z) = (r_1 e^{i\theta_1})^{1/3} (r_2 e^{i\theta_2})^{1/3} = \sqrt[3]{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/3}$$

Si vuole determinare il ramo in cui

$$f(0) = \frac{1}{2} (-1 + i\sqrt{3}) = e^{i(2\pi/3 + 2\pi n)},$$

cioè il ramo in cui gli angoli  $\theta_1^*$  e  $\theta_2^*$  che individuano  $z = 0$  (vedere figura a lato) soddisfano

$$\sqrt[3]{1} e^{i(\theta_1^* + \theta_2^*)/3} = e^{i(2\pi/3 + 2\pi n)},$$

dunque, per avere il ramo richiesto, deve valere la relazione

$$\theta_1^* + \theta_2^* = 2\pi + 6\pi n$$

Il ramo suggerito dalla figura con  $\theta_1^* = -\pi/2$  e  $\theta_2^* = \pi/2$  non va bene. Una scelta possibile è

$$-\pi < \theta_1 \leq \pi, \quad 5\pi < \theta_2 < 7\pi$$

che corrisponde a  $n = 1$ . Naturalmente, altre scelte sono possibili.

È possibile anche fare una differente scelta dei tagli. Per esempio, per la scelta di tagli della figura a lato, si può scegliere il ramo

$$\frac{\pi}{2} < \theta_1 \leq \frac{5\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_2 \leq \frac{3\pi}{2}$$

che corrisponde a  $n = 0$ .

1.4.6. □

(a)  $f(z) = \log(z^2 - 1) = \log(z - 1) + \log(z + 1)$

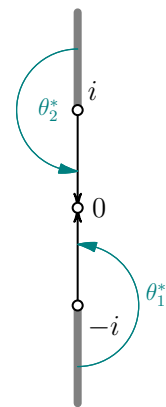
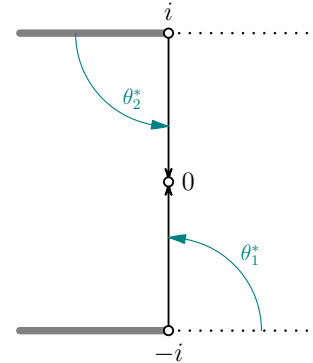
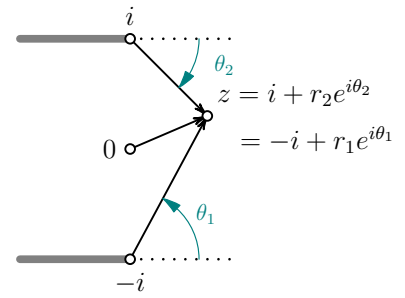
Ci sono punti di diramazione in  $z = \pm 1$ . Per sapere che cosa succede all'infinito, consideriamo il comportamento nello zero di

$$F(z) = f(1/z) = \log\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) = \log(z^{-2}) + \log(1 - z^2)$$

$\log(z^{-2})$  ha un punto di diramazione in  $z = 0$ ,

$$\log(z^{-2}) = \ln |z^{-2}| + i \arg(z^{-2}) = \ln |z^{-2}| - i2 \arg(z)$$

Ogni volta che giriamo intorno allo zero il valore della funzione  $F(z)$  cambia di  $-4\pi i$ . Allora  $z = \infty$  è un punto di diramazione di  $f(z)$ .



Possiamo rendere la funzione ad un sol valore introducendo due tagli che partono da  $z = \pm 1$  e vanno all'infinito.

$$(b) \quad f(z) = \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \log(z+1) - \log(z-1)$$

Ci sono punti di diramazione in  $z = \pm 1$ .

$$F(z) = f(1/z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$F(z)$  non ha punti di diramazione nello zero, quindi  $f(z)$  non ha punti di diramazione all'infinito.

Possiamo rendere la funzione ad un sol valore introducendo due tagli che partono da  $z = \pm 1$  e vanno all'infinito. Possiamo anche rendere la funzione ad un sol valore introducendo un solo taglio che collega i punti  $z = \pm 1$ . Questo perché  $\log(z+1)$  e  $-\log(z-1)$  cambiano rispettivamente di  $2\pi i$  e  $-2\pi i$  quando si percorre un giro completo intorno ai due punti di diramazione nella direzione positiva.