

1.4

1.4.1. □ La multifunzione

$$f(z) = \sqrt{z+1} \sqrt[3]{z-i}$$

è il prodotto di 2 multifunzioni $Z \mapsto \sqrt{Z}$ e $W \mapsto \sqrt[3]{W}$. È quindi ragionevole supporre che $Z = 0$, cioè $z = -1$ e $W = 0$, cioè $z = i$ siano punti di diramazione di f .

Con riferimento alla figura a lato, e tenuto conto dell'esempio analogo della sezione. 4.2), poniamo

$$z = -1 + r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{e} \quad z = i + r_2 e^{i\theta_2}$$

da cui

$$f(z) = w = \sqrt{z+1} \sqrt[3]{z-i} = \sqrt{r_1} \sqrt[3]{r_2} e^{i(\theta_1/2 + \theta_2/3)} = \sqrt{r_1} \sqrt[3]{r_2} e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/3}$$

questo corrisponde alla scelta di uno dei valori di f in z . Per dimostrare che i è un punto di diramazione, consideriamo un cammino chiuso attorno a i . I dettagli della curva sono irrilevanti: conta soltanto la variazione angolare (cerchio rosso della figura). Dopo un giro completo si ha

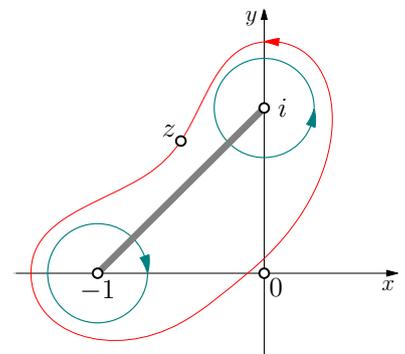
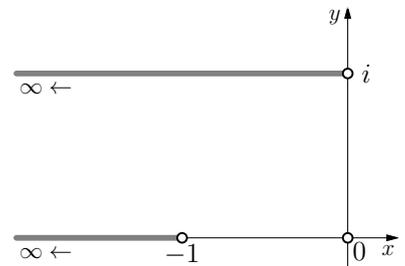
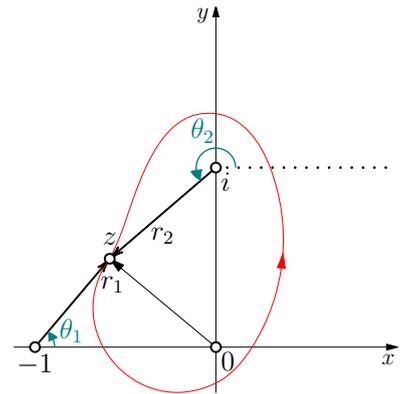
$$e^{i\theta_2/3} \rightsquigarrow e^{i(\theta_2/3 + 2\pi/3)},$$

cioè la radice ha cambiato valore ed è passata nel suo secondo ramo. Mentre z compie un giro attorno a i , l'angolo θ_1 va avanti e indietro: raggiunge un valore massimo a sinistra e poi, quando z ritorna al suo valore iniziale, anch'esso ritorna al suo valore iniziale. Quindi complessivamente $f(z)$ varia in un giro completo per la sola variazione dovuta alla sola radice cubica. Fine della dimostrazione che i è un punto di diramazione. Analogo ragionamento per -1 porta alla conclusione che anche -1 è un punto di diramazione. Poiché ci vogliono due giri per tornare al valore iniziale, $z = -1$ è un punto di diramazione semplice; per i ce ne vogliono tre e dunque è di ordine 2.

I tagli standard per ottenere rami ad un sol valore dalla funzione di partenza sono mostrati nella figura a lato. Non è possibile ottenere rami ad un sol valore con il solo taglio congiungente i punti di diramazione perchè pur essendo le "velocità angolari" opposte in senso di rotazione sono di diverso modulo (una è $1/2$ e l'altra è $1/3$), e non ci può essere compensazione dopo un giro completo. Si veda la figura a lato.

1.4.2. □ $f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{z-1} \sqrt{z+1}$, al finito, ha due punti di diramazione semplici in $z = \pm 1$. Per valutare se $f(z)$ ha un punto di diramazione all'infinito, si considera $F(z) = f(1/z)$ per $z = 0$. Ma

$$F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{z^2}} \sqrt{1 - z^2} = \frac{1}{z} \sqrt{1 - z^2}.$$



Quindi $z = 0$ non è un punto di diramazione di F e di conseguenza $z = \infty$ non è un punto di diramazione di f .

1.4.3. □ (a) $f(z) = \sin \sqrt{z}$. Se si considera un giro attorno a 0 lungo il cerchio unitario $|z| = 1$, partendo, per esempio, da $\theta = 0$, si ha:

$$\sin e^{i(\theta=0)/2} = \sin(1) \implies \sin e^{i(\theta=2\pi)/2} = \sin e^{i\pi} = \sin(-1) = -\sin(1)$$

Quindi $\sin \sqrt{z}$ ha un punto di diramazione semplice nello zero. Poiché un giro lungo $|z| = 1$ è anche un giro attorno all'infinito, anche l'infinito è un punto di diramazione della funzione.

(b) $f(z) = \sqrt{\sin z}$. Il seno si annulla per $z = n\pi$ ed è singolare all'infinito. Ci potrebbero essere dei punti di diramazione in questi punti. Consideriamo il punto $z = n\pi$. Possiamo scrivere

$$\sin z = (z - n\pi) \frac{\sin z}{z - n\pi}.$$

La funzione

$$g(z) = \frac{\sin z}{z - n\pi}$$

è non nulla e non ha una "vera" singolarità in $z = n\pi$, in quanto¹

$$\lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{\sin z}{z - n\pi} = \lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{\cos z}{1} = (-1)^n$$

¹ Quando la singolarità è solo apparente e può essere "eliminata" si dice appunto *singolarità eliminabile*.

Allora, in un piccolo intorno di $n\pi$ si ha

$$\sin z = (z - n\pi)(-1)^n$$

Quindi, poiché $\sqrt{z - n\pi}$ ha un punto di diramazione semplice per $z = n\pi$ anche $\sqrt{\sin z}$ avrà un punto di diramazione semplice per $z = n\pi$.

Poiché tutti i punti di diramazione $z = n\pi$ vanno fino all'infinito, l'infinito non è una singolarità isolata, ma un punto di accumulazione di singolarità. Un punto di diramazione deve essere una singolarità isolata e quindi l'infinito non è un punto di diramazione.

(c) $f(z) = \sqrt{z} \sqrt{\sin z}$. La funzione è a un sol valore. Dimostrazione veloce:

$$\begin{aligned} z^{1/2} \sin z^{1/2} &= \pm \sqrt{z} \sin(\pm \sqrt{z}) \\ &= \pm \sqrt{z} (\pm \sin(\sqrt{z})) \\ &= \sqrt{z} \sin \sqrt{z} \end{aligned}$$

(d) $f(z) = \sqrt{\sin z^2}$. Poiché $\sin z^2 = 0$ per $z = (n\pi)^{1/2}$, questi potrebbero essere punti di diramazione. Possiamo scrivere

$$\sin z^2 = z^2 \frac{\sin z^2}{z^2}$$

dove la funzione $\sin z^2/z^2$ è non nulla e ha una singolarità eliminabile per $z = 0$: per $z \rightarrow 0$ la funzione tende a 1. Poichè $\sqrt{z^2}$ non ha un punto di diramazione in 0, lo stesso vale per $f(z)$. Consideriamo adesso il punto $z = (n\pi)^{1/2}$,

$$\sin z^2 = (z - \sqrt{n\pi}) \frac{\sin z^2}{z - \sqrt{n\pi}}$$

$\sin z^2/(z - \sqrt{n\pi})$ è non nulla e ha una singolarità eliminabile per $z = \sqrt{n\pi}$

$$\lim_{z \rightarrow \sqrt{n\pi}} \frac{\sin z^2}{z - \sqrt{n\pi}} = \lim_{z \rightarrow \sqrt{n\pi}} \frac{2z \cos z^2}{1} = 2\sqrt{n\pi}(-1)^n$$

Poiché $(z - \sqrt{n\pi})^{1/2}$ ha un punto di diramazione in $z = \sqrt{n\pi}$, anche $\sqrt{\sin z^2}$ lo avrà. Quindi $f(z) = \sqrt{\sin z^2}$ ha punti di diramazione semplici in $z = \sqrt{n\pi}$ per $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Il punto all'infinito non è una singolarità isolata.²

² E poichè non è neanche un polo, è una singolarità essenziale (le definizioni di polo e di singolarità essenziale saranno date in una lezione successiva).

1.4.4. □ Per trovare i punti di diramazione di

$$f(z) = \sqrt[3]{z^3 - z}$$

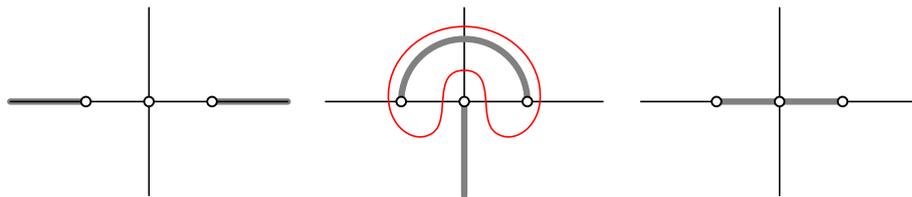
espandiamo $f(z)$,

$$f(z) = z^{1/3}(z - 1)^{1/3}(z + 1)^{1/3}$$

Ci sono punti di diramazione di ordine 2 in $z = -1, 0, 1$. Facendo la sostituzione $z \mapsto 1/z$ si vede che non ci sono punti di diramazione all'infinito in quanto

$$F(z) = f(1/z) = \frac{1}{z}(1 - z)^{1/3}(1 + z)^{1/3}$$

Ci sono tre possibili tagli:



Si vede facilmente che il primo taglio va bene e trasforma la multifunzione in una funzione a un solo valore. Il secondo taglio NON va bene perché permette un giro intorno ai punti ± 1 . Un giro intorno a questi due punti fa variare il valore di partenza della funzione di un fattore $e^{i4\pi/3}$, quindi la funzione così ottenuta non è a un sol valore. Il terzo taglio va bene: girando intorno ai tre tagli la funzione non cambia ($e^{i6\pi/3} = e^{i2\pi} = 1$); si osservi che questo è anche conseguenza diretta del fatto che l'infinito non è un punto di diramazione.

1.4.5. □ Per prima cosa fattorizziamo $f(z)$,

$$f(z) = (z - i)^{1/3}(z + i)^{1/3}.$$

Ci sono punti di diramazione (di ordine 2) in $z = \pm i$. Scegliamo in tagli secondo la convenzione standard, come nella figura a lato. Si ha

$$f(z) = (r_1 e^{i\theta_1})^{1/3} (r_2 e^{i\theta_2})^{1/3} = \sqrt[3]{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/3}$$

Si vuole determinare il ramo in cui

$$f(0) = \frac{1}{2} (-1 + i\sqrt{3}) = e^{i(2\pi/3 + 2\pi n)},$$

cioè il ramo in cui gli angoli θ_1^* e θ_2^* che individuano $z = 0$ (vedere figura a lato) soddisfano

$$\sqrt[3]{1} e^{i(\theta_1^* + \theta_2^*)/3} = e^{i(2\pi/3 + 2\pi n)},$$

dunque, per avere il ramo richiesto, deve valere la relazione

$$\theta_1^* + \theta_2^* = 2\pi + 6\pi n$$

Il ramo suggerito dalla figura con $\theta_1^* = -\pi/2$ e $\theta_2^* = \pi/2$ non va bene. Una scelta possibile è

$$-\pi < \theta_1 \leq \pi, \quad 5\pi < \theta_2 < 7\pi$$

che corrisponde a $n = 1$. Naturalmente, altre scelte sono possibili.

È possibile anche fare una differente scelta dei tagli. Per esempio, per la scelta di tagli della figura a lato, si può scegliere il ramo

$$\frac{\pi}{2} < \theta_1 \leq \frac{5\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_2 \leq \frac{3\pi}{2}$$

che corrisponde a $n = 0$.

1.4.6. □

(a) $f(z) = \log(z^2 - 1) = \log(z - 1) + \log(z + 1)$

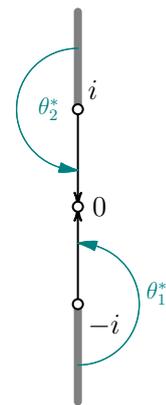
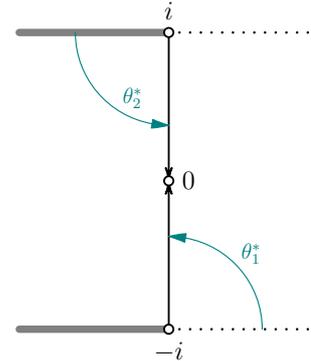
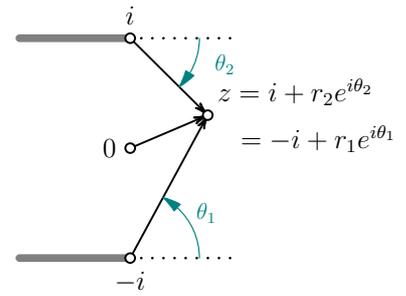
Ci sono punti di diramazione in $z = \pm 1$. Per sapere che cosa succede all'infinito, consideriamo il comportamento nello zero di

$$F(z) = f(1/z) = \log\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) = \log(z^{-2}) + \log(1 - z^2)$$

$\log(z^{-2})$ ha un punto di diramazione in $z = 0$,

$$\log(z^{-2}) = \ln |z^{-2}| + i \arg(z^{-2}) = \ln |z^{-2}| - i2 \arg(z)$$

Ogni volta che giriamo intorno allo zero il valore della funzione $F(z)$ cambia di $-4\pi i$. Allora $z = \infty$ è un punto di diramazione di $f(z)$.



Possiamo rendere la funzione ad un sol valore introducendo due tagli che partono da $z = \pm 1$ e vanno all'infinito.

$$(b) \quad f(z) = \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \log(z+1) - \log(z-1)$$

Ci sono punti di diramazione in $z = \pm 1$.

$$F(z) = f(1/z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$F(z)$ non ha punti di diramazione nello zero, quindi $f(z)$ non ha punti di diramazione all'infinito.

Possiamo rendere la funzione ad un sol valore introducendo due tagli che partono da $z = \pm 1$ e vanno all'infinito. Possiamo anche rendere la funzione ad un sol valore introducendo un solo taglio che collega i punti $z = \pm 1$. Questo perché $\log(z+1)$ e $-\log(z-1)$ cambiano rispettivamente di $2\pi i$ e $-2\pi i$ quando si percorre un giro completo intorno ai due punti di diramazione nella direzione positiva.