

## 1.5

1.5.1. □ Vedere sezione. 5.8.1.

1.5.2. □ Perché composizione di due trasformazioni anti-conformi.

1.5.3. □ Vedere sezione. 5.8.2.

1.5.4. □ METODO 1. Richiedendo che le equazioni di Cauchy-Riemann siano soddisfatte per

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy, \quad u = x^2 + y^2$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \partial_y v &= \partial_x u = 2x \\ \partial_x v &= -\partial_y u = -2y. \end{aligned}$$

Integrando,

$$\begin{aligned} v &= 2xy + g(y) \\ v &= -2yx + h(x). \end{aligned}$$

È chiaro che queste identità non possono essere verificate per nessuna scelta di  $g$  e  $h$ .

METODO 2. Per essere analitica, la funzione  $f = u + iv$  deve soddisfare le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_y v \\ \partial_x v &= -\partial_y u \end{aligned}$$

E se queste sono soddisfatte le funzioni  $u$  e  $v$  devono essere *funzioni armoniche*, cioè essere entrambe soluzioni dell'equazione di Laplace nel piano. Questa proprietà si verifica facilmente:

$$\begin{aligned} \partial_x \partial_x u &= \partial_x \partial_y v = \partial_y \partial_x v = -\partial_y \partial_y u \\ \partial_x \partial_x v &= -\partial_x \partial_y u = -\partial_y \partial_x u = -\partial_y \partial_y v \end{aligned}$$

Quindi

$$\Delta u \equiv \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad \text{e} \quad \Delta v \equiv \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = 0$$

La funzione  $u = x^2 + y^2$ , non è armonica in quanto  $\Delta u = 4$ . Quindi non esiste alcuna scelta di  $v$  che renda la funzione  $f(x + iy) = (x^2 + y^2) + iv$  analitica.

1.5.5.  $\square$  Preliminarmente, richiamiamo che i limiti di funzioni complesse si comportano esattamente come i limiti di funzioni reali. In particolare, se  $\{z_n\}$  è una successione di punti nel piano complesso che converge al numero complesso  $a$  e se

$$\lim_{z_n \rightarrow a} f(z_n) = A, \quad \lim_{z_n \rightarrow a} g(z_n) = B,$$

allora

$$\begin{aligned} \lim_{z_n \rightarrow a} [f(z_n) + g(z_n)] &= A + B \\ \lim_{z_n \rightarrow a} [f(z_n)g(z_n)] &= AB \\ \lim_{z_n \rightarrow a} [f(z_n)/g(z_n)] &= A/B \quad \text{se } B \neq 0 \end{aligned}$$

(a) Oggetto di questo esercizio è la funzione (per  $z \neq 0$ )

$$f(z) \equiv f(x + iy) = \frac{xy}{\bar{z}}$$

Viene chiesto di mostrare che  $f(z)$  tende a 0 quando  $z$  tende verso qualunque punto dell'asse reale o dell'asse immaginario, inclusa l'origine. Si devono quindi determinare i limiti

$$\lim_{z \rightarrow s} \frac{xy}{\bar{z}}, \quad \lim_{z \rightarrow is} \frac{xy}{\bar{z}}$$

dove  $s$  è reale e, come di consueto,  $z = x + iy$ . In primo luogo, riscriviamo la funzione  $f$  in notazione complessa,

$$\frac{xy}{\bar{z}} = \frac{1}{4i} \frac{(z + \bar{z})(z - \bar{z})}{\bar{z}} = \frac{1}{4i} \frac{z^2 - \bar{z}^2}{\bar{z}} = \frac{1}{4i} \left[ \frac{z^2}{\bar{z}} - \bar{z} \right]$$

Allora

$$\lim_{z \rightarrow s} \frac{xy}{\bar{z}} = \lim_{z \rightarrow s} \frac{1}{4i} \left[ \frac{z^2}{\bar{z}} - \bar{z} \right] = \frac{1}{4i} \left[ \lim_{z \rightarrow s} \frac{z^2}{\bar{z}} - \lim_{z \rightarrow s} \bar{z} \right] = s - s = 0.$$

Analogamente si trova

$$\lim_{z \rightarrow is} \frac{xy}{\bar{z}} = 0.$$

Risulta così verificato che  $f(z)$  tende a 0 quando  $z$  tende verso qualunque punto dell'asse reale o dell'asse immaginario, inclusa l'origine.

(b) Poiché lungo gli assi  $f = u + iv = 0$ , sono nulli gli incrementi lungo  $x$  e lungo  $y$  di  $u$  e  $v$  a partire dall'origine, e quindi le loro derivate parziali in  $z = 0$ : le equazioni di Cauchy-Riemann sono banalmente soddisfatte.

(c) Consideriamo l'azione della trasformazione su un vettore  $\delta z$  (infinitesimo) applicato nell'origine, di lunghezza  $\delta\rho$  e angolo  $\phi$ .

Allora

$$\begin{aligned}\delta z \mapsto \delta f &= f(\delta z) = \frac{1}{4i} \left[ \frac{(\delta z)^2}{\delta z} - \overline{\delta z} \right] = \frac{1}{4i} [\delta \rho e^{i3\phi} - \delta \rho e^{-i\phi}] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{i2\phi} - e^{-i2\phi}}{2i} \right] \delta \rho e^{i\phi} = \frac{1}{2} \sin(2\phi) \delta \rho e^{i\phi}\end{aligned}$$

Questa non è una stiro-rotazione, non tanto per la rotazione, che c'è ed è l'identità, ma per lo stiramento  $\frac{1}{2} \sin(2\phi)$ , che non è uniforme. Si osservi che per  $\phi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ ,  $\delta f = 0$ , in accordo con (b).

1.5.6.  $\square$  Banale.

1.5.7.  $\square$  Inversione complessa:

$$I(z = x + iy) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = u + iv$$

(a) Allora 2

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

(b) Calcoliamo le derivate parziali

$$\begin{aligned}\partial_x u &= \frac{x^2 + y^2 - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_y u &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_x v &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_y v &= \frac{-(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

Per  $(x, y) \neq (0, 0)$ , si ha  $\partial_x u = \partial_y v$  e  $\partial_y u = -\partial_x v$ , che sono proprio le equazioni di Cauchy-Riemann. Per  $(x, y) = (0, 0)$  le derivate parziali sono discontinue (verificare!): le equazioni di Cauchy-Riemann non valgono.

(c)

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

In coordinate polari  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$  si ha

$$y^2 - x^2 = \rho^2(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = -\rho^2 \cos(2\theta), \quad 2xy = \rho^2 \sin(2\theta)$$

e quindi

$$J = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} \cos(\pi - 2\theta) & -\sin(\pi - 2\theta) \\ \sin(\pi - 2\theta) & \cos(\pi - 2\theta) \end{pmatrix}$$

che descrive uno stiramento di  $1/\rho^2$  e una rotazione dell'angolo  $\pi - 2\theta$ .

(d)

$$\partial_x f = \partial_x u + i\partial_x v = \frac{y^2 - x^2 + i2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\rho^2 [-\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)]}{\rho^4} = -\frac{\cos(2\theta) - i\sin(2\theta)}{\rho^2}$$

da cui

$$\partial_x f = -\frac{1}{\rho^2} e^{-i2\theta} = -\frac{1}{\rho^2 e^{i2\theta}} = -\frac{1}{z^2}$$

che, naturalmente, coincide, con quanto si ottiene con le regole del calcolo

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z} \right) = -\frac{1}{z^2}.$$