

1.6

1.6.1. □

I passaggi sono esattamente gli stessi di quelli per la formula di Cauchy data nella sezione. 6.6.

$$\oint_C \frac{dz}{z} = - \oint_{-C_\epsilon} \frac{dz}{z} = \oint_{C_\epsilon} \frac{dz}{z} dz.$$

dove  $C_\epsilon$  è un cerchio di raggio  $\epsilon$  centrato in  $O$ . Calcoliamo l'integrale a secondo membro, tenuto conto che  $z = \epsilon e^{i\theta}$ :

$$\oint_{C_\epsilon} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon d\epsilon e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{d(\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{i e^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Il valore non dipende da  $\epsilon$ , che possiamo quindi far tendere a 0. Quindi

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

dove  $C$  è il bordo di tutta la regione (semplicemente connessa) interna a  $C$ ; questo era proprio quello che si voleva dimostrare.

1.6.2. □

Poichè

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{(-1/2)i}{z-i} + \frac{(1/2)i}{z+i}$$

$f(z)$  rappresenta il campo magnetico generato da due correnti puntiformi in  $+i$  e  $-i$  di uguale intensità ma di segno opposto. Quindi, per il teorema di Ampère,

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} = 0$$

per qualunque curva chiusa  $C$  che racchiuda le due correnti.

Consideriamo due cerchi di raggio  $\epsilon$ ,  $C_1$  e  $C_2$ , centrati rispettivamente in  $i$  e  $-i$  e applichiamo ad essi la formula di Cauchy (vedere figura A.2). Incominciamo con  $C_1$ .

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{1+z^2} = (-1/2)i \oint_{C_1} \frac{dz}{z-i} + (1/2)i \oint_{C_1} \frac{dz}{z+i}.$$

Poiché  $1/(z+i)$  è analitica nella regione delimitata da  $C_1$ , il secondo integrale a secondo membro è nullo, per cui, applicando la formula di Cauchy al primo, si ottiene

$$I_{C_1} = \oint_{C_1} \frac{dz}{1+z^2} = (-1/2)i(2\pi i) + 0 = \pi.$$

Procedendo in maniera analoga per  $C_2$ , si trova

$$I_{C_2} = \oint_{C_2} \frac{dz}{1+z^2} = 0 + (1/2)i(2\pi i) = -\pi.$$

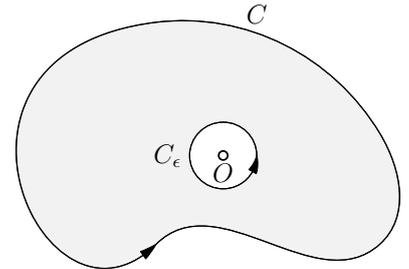


Figura 1.1:  $C_\epsilon$  è un cerchio di raggio  $\epsilon$  che circonda l'origine  $O$ .

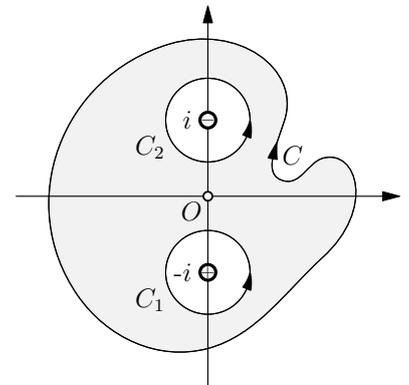


Figura 1.2:  $f(z)$  rappresenta il campo generato da due correnti di uguale intensità, ma di segno opposto.

Applichiamo adesso il teorema di Cauchy alla curva  $C = C_1 - C_2$  (che delimita la regione molteplicemente connessa colorata in grigio nella figura):

$$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} = \pi - \pi = 0,$$

che è proprio quello che si voleva dimostrare.

**1.6.3.** □

È chiesto di calcolare

$$I_{J_R} = \int_{J_R} \frac{dz}{z^2 + 1},$$

dove  $C$  è la curva mostrata nella figura a lato. Facendo la sostituzione  $z = Re^{i\theta}$ , si ottiene

$$I_{J_R} = \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{R^2e^{2i\theta} + 1} = \frac{i}{R} \int_0^\pi \frac{e^{i\theta}d\theta}{e^{2i\theta} + 1/R^2} \quad (1.11)$$

Al prim'ordine in  $1/R$ , possiamo trascurare  $1/R^2$  a denominatore, per cui

$$I_{J_R} = \frac{i}{R} \int_0^\pi e^{-i\theta}d\theta = \frac{i}{R} \left[ \frac{e^{-i\theta}}{-i} \right]_0^\pi + o(1/R) = \frac{2}{R} + o(1/R)$$

**1.6.4.** □ Gli integrali reali sono un caso particolare di integrali di linea complessi.

$$I_{L_R} = \int_{L_R} \frac{dz}{z^2 + 1} = \int_{-R}^R \frac{dx}{x^2 + 1} = 2 \arctan(R)$$

Ora,

$$\arctan(R) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{R} + o(1/R)$$

Quindi

$$I_{L_R} = \pi - \frac{2}{R} + o(1/R)$$

**1.6.5.** □

Nella regione racchiusa da  $C_R = J_R + L_R - C_1$  (vedere la figura a lato) la funzione  $1/(1+z^2)$  è analitica, quindi, per il teorema di Cauchy (vedere A.6.2)

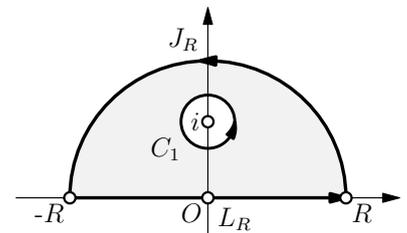
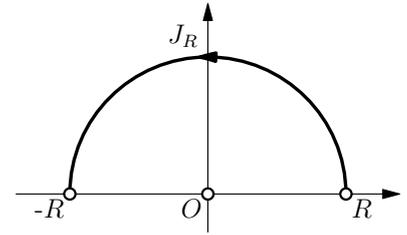
$$\oint_{C_R} \frac{dz}{z^2 + 1} = (-1/2)i \oint_{C_1} \frac{dz}{z - i} = \pi$$

D'altro canto, da A.6.3 e A.6.4 si ha

$$I_{J_R} + I_{L_R} = \frac{2}{R} + o(1/R) + \pi - \frac{2}{R} + o(1/R) = \pi + o(1/R)$$

Quindi il teorema di Cauchy risulta verificato all'ordine  $1/R$ . Dal calcolo esatto dell'integrale (A.11) (un po' laborioso, ma utile esercizio) risulta in effetti che

$$I_{J_R} + I_{L_R} = \pi$$



1.6.6. □

(a) I passaggi sono esattamente gli stessi di quelli per la formula di Cauchy data nella sezione. 6.6.

$$\oint_C \frac{dz}{z^n} + \oint_{-C_\epsilon} \frac{dz}{z^n} = 0.$$

dove  $C_\epsilon$  è un cerchio di raggio  $\epsilon$  centrato in  $O$ . Calcoliamo il secondo integrale, tenuto conto che  $z = \epsilon e^{i\theta}$ :

$$\oint_{C_\epsilon} \frac{dz}{z^n} = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon i e^{i\theta} d\theta}{\epsilon^n e^{in\theta}} = i\epsilon^{1-n} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta = \frac{e^{i(1-n)2\pi} - 1}{\epsilon^{n-1}(1-n)} = 0, \quad \text{per } n \neq 1$$

in quanto  $e^{i\theta}$  è periodica di periodo  $2\pi$  (per  $n = 1$ , l'integrale vale chiaramente  $2\pi i$ , come peraltro già calcolato nel problema A.6.1).

Analogo risultato per  $n = -1, -2, \dots$ . Quindi

$$\oint_C \frac{dz}{z^n} = 2\pi i, \quad n \neq 1$$

dove  $C$  è il bordo di tutta la regione (semplicemente connessa) interna a  $C$ , che era proprio quello che si voleva dimostrare.

(b) Il campo

$$\frac{q}{z+d} + \frac{q}{z-d} = \frac{2qd}{z^2 - d^2}$$

è quello generato da due cariche  $q$  di segno opposto poste in  $+d$  e  $-d$  sull'asse reale. Facendo tendere  $d$  a zero e tenendo costante  $2qd \equiv p$  si ottiene il campo

$$\frac{p}{z^2}$$

di un dipolo ideale. Scegliendo per  $p$  un numero complesso si ottiene un dipolo avente  $p$  come asse.

Fondendo due dipoli di momento opposto e centrati in  $\pm\epsilon$ ,

$$\frac{p}{(z-\epsilon)^2} - \frac{p}{(z+\epsilon)^2} = p \frac{z^2 + 2z\epsilon + \epsilon^2 - z^2 + 2z\epsilon - \epsilon^2}{(z^2 - \epsilon^2)^2} = \frac{4p\epsilon z}{(z^2 - \epsilon^2)^2}.$$

Passando al limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , tenendo  $Q = 4p\epsilon$  costante, si ottiene il campo di quadrupolo

$$\frac{Q}{z^3}$$

e così via. Per i ritratti di fase di questi campi si vedano i complementi del capitolo 6.

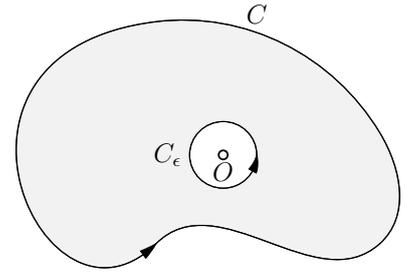


Figura 1.3:  $C_\epsilon$  è un cerchio di raggio  $\epsilon$  che circonda l'origine  $O$ .