

## 1.7

## 1.7.1. □

Per determinare il valore di

$$\int_C (12z^2 - 4iz) dz,$$

dove  $C$  è la linea  $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$  che congiunge i punti  $(1, 1)$  e  $(2, 3)$  si può: (i) calcolare l'integrale di linea lungo la curva data separando parte reale e parte immaginaria e applicando le regole di calcolo degli integrali di linea reali; (ii) osservare che, essendo la funzione integranda analitica, il valore dell'integrale non dipende dalla linea, quindi, invece di quella assegnata, si prende una linea molto più semplice che congiunge i due punti, per esempio una retta; fatto questo si calcola l'integrale di linea lungo il segmento di retta tra  $(1, 1)$  e  $(2, 3)$ ; (iii) osservare che, essendo la funzione integranda analitica, valgono le usuali regole del calcolo: la primitiva della funzione integranda è  $4z^3 - 2iz^2$  e quindi

$$\int_C (12z^2 - 4iz) dz = \int_{1+i}^{2+3i} (12z^2 - 4iz) dz = (4z^3 - 2iz^2) \Big|_{1+i}^{2+3i} = -156 + 38i$$

Chiaramente, (iii) è il metodo più furbo!

## 1.7.2. □

(a)  $C: |z| = 1$ . Si ponga  $z = e^{i\theta}$ . Allora

$$\oint_C |z|^2 dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} de^{i\theta} = e^{i2\pi} - 1 = 0$$

(b)  $|z - 1| = 1$ . Si ponga  $z = 1 + e^{i\theta}$ ,  $dz = ie^{i\theta} d\theta = (-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta$ . Allora

$$\oint_C |z|^2 dz = \int_0^{2\pi} [(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta] (-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta = 2i\pi$$

## 1.7.3. □

Calcolare

$$\int_C \bar{z}^2 dz + z^2 dz$$

lungo la curva  $C$  definita da  $z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 = (2 - 2i)z + (2 + 2i)\bar{z}$  tra il punto  $z = 1$  e  $z = 2 + 2i$ .

Risposta:  $248/15$ .

## 1.7.4. □

(a)

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4)^2} = \frac{z}{[(z + 2i)(z - 2i)]^2}$$

È chiaro "a vista" che  $2i$  e  $-2i$  sono poli di ordine 2 (i poli sono gli zeri della funzione inversa). Questi due poli sono le sole singolarità e dunque la  $f(z)$  è meromorfa.

(b)

$$f(z) = \sec(1/z) \equiv \frac{1}{\cos(1/z)}$$

Si hanno singolarità quando  $\cos(1/z) = 0$ , cioè in  $1/z = (2n+1)\pi/2$

o

$$z = \frac{2}{(2n+1)\pi} \quad \text{dove } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Poiché  $f(z)$  non è definita in  $z = 0$  anche  $z = 0$  è una singolarità.

Sulla base di quanto visto a lezione, usiamo la regola che permette di decidere in generale se una singolarità è un polo di ordine  $m$  per una funzione analitica con singolarità in  $z = a$ . Partiamo con  $k = 1$ :

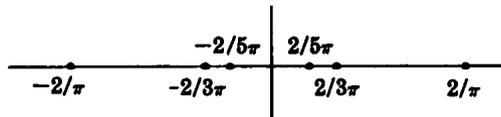
$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 2/[(2n+1)\pi]} \left[ z - \frac{2}{(2n+1)\pi} \right] f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2/[(2n+1)\pi]} \frac{z - 2/[(2n+1)\pi]}{\cos(1/z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2/[(2n+1)\pi]} \frac{1}{-\sin(1/z)(-1/z^2)} \quad (\text{Hospital}) \\ &= \frac{\{2/[(2n+1)\pi]\}^2}{\sin[(2n+1)\pi/2]} \\ &= \frac{4(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} \neq 0 \end{aligned}$$

Quindi le singolarità

$$z = \frac{2}{(2n+1)\pi} \quad \text{dove } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

sono *poli di ordine uno*, cioè *poli semplici*. Si osservi che questi poli sono sull'asse reale in

$$z = \pm \frac{2}{\pi}, \pm \frac{2}{3\pi}, \pm \frac{2}{5\pi}, \dots$$



Ciascuno di questi può essere circondato da un cerchio di raggio  $\delta$ , e quindi questi punti sono singolarità isolate (come deve essere per un polo); naturalmente,  $\delta$  diventa sempre più piccolo man mano che ci si avvicina allo zero. Ma lo zero non ha questa proprietà: non esiste alcun cerchio di raggio  $\delta$ , centrato nello zero, all'interno del quale non ci siano singolarità della funzione. Lo zero non è una singolarità isolata, è una *singolarità essenziale*. Equivalentemente, potremmo applicare la regola nel quadro sopra e verificare che non esiste alcun  $k$  tale  $\lim_{z \rightarrow 0} z^k f(z) = c$ ,

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^k \frac{1}{\cos(1/z)} = \infty, \quad \forall k$$

(c)

$$f(z) = \frac{\ln(z-2)}{(z^2+2z+2)^2}$$

Il punto  $z = 2$  è un punto di diramazione ed è una singolarità isolata. Le radici di  $(z^2+2z+2)$  sono  $z = -1 \pm i$ , da cui  $z^2+2z+2 = (z+1+i)(z+1-i)$ . Quindi  $z = -1 \pm i$  sono poli di ordine 2 (che sono singolarità isolate).

(d)

$$f(z) = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

A prima vista, sembra che  $z = 0$  sia un punto di diramazione. Per verifica, sia  $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2\pi)}$ , dove  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

Se  $z = re^{i\theta}$ , si ha

$$f(z) = \frac{\sin(\sqrt{r}e^{i\theta/2})}{\sqrt{r}e^{i\theta/2}}$$

Se  $z = re^{i(\theta+2\pi)}$ , si ha

$$f(z) = \frac{\sin(\sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{i\pi})}{\sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{i\pi}} = \frac{\sin -(\sqrt{r}e^{i\theta/2})}{-\sqrt{r}e^{i\theta/2}} = \frac{\sin(\sqrt{r}e^{i\theta/2})}{\sqrt{r}e^{i\theta/2}}$$

Quindi, in realtà, la funzione è a un sol valore e  $z = 0$  non può quindi essere un punto di diramazione. Poiché

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 1,$$

ne segue che  $z = 0$  è una singolarità eliminabile.

1.7.5.  $\square$  Si deve calcolare

$$\oint_C f(z) dz$$

dove

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2} = \frac{e^z}{(z - i\pi)^2(z + i\pi)^2}$$

e  $C$  è il cerchio  $|z| = 4$ . La funzione  $f(z)$  ha due poli  $z = \pm i\pi$  di ordine  $m = 2$  nel cerchio  $C$ . Quindi

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f, +i\pi) + \text{Res}(f, -i\pi)]$$

Ricordiamo la formula generale per il residuo in un polo  $a$  di ordine  $m$ ,

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \left[ \frac{d}{dz} \right]^{m-1} [(z-a)^m f(z)] \Big|_{z=a}$$

Per  $a = i\pi$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i\pi) &= \frac{1}{1!} \left[ \frac{d}{dz} \right] \left[ (z - \pi i)^2 \frac{e^z}{(z - i\pi)^2(z + i\pi)^2} \right] \Big|_{z=i\pi} = \frac{d}{dz} \frac{e^z}{(z + i\pi)^2} \Big|_{z=i\pi} \\ &= \frac{e^z(z + i\pi)^2 - e^z[2(z + i\pi)]}{(z + i\pi)^4} \Big|_{z=i\pi} = \frac{e^z(z + i\pi) - 2e^z}{(z + i\pi)^3} \Big|_{z=i\pi} = \frac{\pi + i}{4\pi^3} \end{aligned}$$

Analogamente, si trova

$$\operatorname{Res}(f, -i\pi) = \frac{\pi - i}{4\pi^3}$$

Allora

$$\oint_C \frac{e^z dz}{(z^2 + \pi^2)^2} = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, +i\pi) + \operatorname{Res}(f, -i\pi)] = 2\pi i \left[ \frac{\pi + i}{4\pi^3} + \frac{\pi - i}{4\pi^3} \right] = \frac{i}{\pi}$$

1.7.6.  $\square$

Calcolare

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz$$

dove  $C$  è il cerchio  $|z| = 2$ . Capito il metodo, non è necessario essere sempre pedanti:

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz = 2\pi i \times \frac{1}{2} (e^{iz})'' \Big|_{z=0} = -\pi i$$

1.7.7.  $\square$  Dimostrare che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \sin t$$

per  $t > 0$  e  $C$  il cerchio  $|z| = 3$ .

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{(z+i)(z-i)} dz = \frac{e^{-it}}{-2i} + \frac{e^{it}}{2i} = \sin t$$

1.7.8.  $\square$

Calcolare

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{z^2 - 1} dz$$

lungo un rettangolo con vertici in: (a)  $2 \pm i, -2 \pm i$ ; (b)  $-i, 2 - i, 2 + i, i$ .

Risposta: (a) 0, (b)  $-1/2$ .

1.7.9.  $\square$

Siano

$$P(z) = \frac{1}{\cos z}, \quad Q(z) = \frac{\cos z}{z^2}, \quad R(z) = \frac{1}{(e^z - 1)^3}.$$

Trovare i poli di  $P$ ,  $Q$  e  $R$  e il loro ordine.

Risposta: se siete arrivati sin qui, non avete problemi a trovarla.