

## 1.8

1.8.1. □

(I)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3}$$

Polo triplo in  $i$ 

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2} \frac{12}{(z+i)^5} = -\frac{3i}{16}.$$

Stesso contorno della figura 8.1.

$$\oint f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{dx}{(1+x^2)^3} + \int_{C_R^+} \frac{dz}{(1+z^2)^3} = 2\pi i \text{Res}(f, i) = \frac{3\pi}{8}$$

Nel limite  $R \rightarrow \infty$  l'integrale lungo  $C_R^+$  dà contributo nullo, quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3\pi}{8}$$

(II)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(a+bx^2)^4} = \frac{\pi}{16a^{3/2}b^{5/2}}, \quad a, b > 0$$

Polo di quart'ordine in  $i\sqrt{a/b}$ .

(III)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x}, \quad 0 < a < 1$$

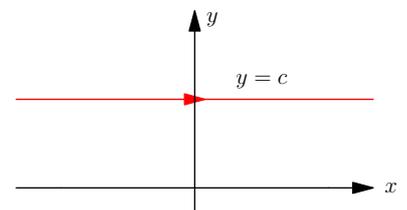
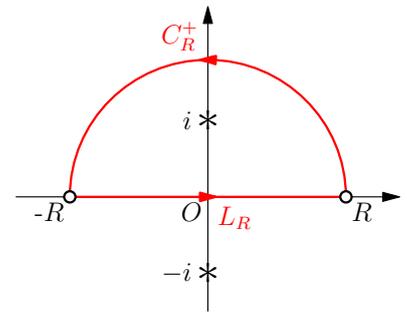
La funzione

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

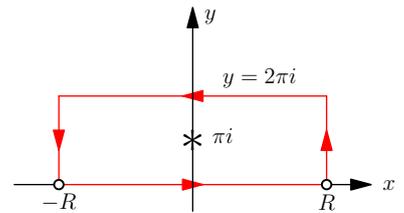
ha poli per  $z = (2n+1)\pi i$ . È dunque impossibile usare il contorno della figura 8.1. L'idea per risolvere questo integrale (e integrali simili) è di trovare un cammino chiuso tale che su una parte del cammino l'integrale sia riconducibile a quello sull'asse reale che si vuole calcolare, e tale che le altre parti del cammino chiuso diano contributo nullo in un limite opportuno.

Consideriamo l'integrale lungo la retta di equazione  $y = c$  nel piano complesso, dove  $c$  è una costante, diciamo positiva. Allora  $z = x + ic$  e quindi

$$\int_{y=c} \frac{e^{az}}{1+e^z} dz = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iac} e^{ax}}{1+e^{ic} e^{ax}} dx = e^{iac} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{ic} e^{ax}} dx$$



Ci siamo quasi! Basta infatti scegliere  $c = 2\pi$ , e la funzione integranda diventa identica alla funzione  $f(z)$  in quanto  $e^{i2\pi} = 1$ . Possiamo allora scegliere il cammino della figura a lato e ottenere



$$\int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} + \int_{y=0}^{2\pi} \frac{e^{aR} e^{iy}}{1 + e^R e^{iy}} idy - e^{ia2\pi} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} - \int_{y=0}^{2\pi} \frac{e^{-aR} e^{iy}}{1 + e^{-R} e^{iy}} idy = 2\pi i \text{Res}(f, \pi i) \tag{1.12}$$

Calcoliamo il residuo nel polo semplice  $\pi i$ ,

$$\text{Res}(f, \pi i) = \lim_{z \rightarrow \pi i} (z - \pi i) \frac{e^{az}}{1 + e^z} = \frac{1}{e^{\pi i}} e^{a\pi i} = -e^{a\pi i}.$$

Consideriamo il modulo della funzione integranda del primo integrale in  $dy$

$$\left| \frac{e^{aR} e^{iy}}{1 + e^R e^{iy}} \right| = \frac{e^{aR}}{|1 + e^R e^{iy}|} \leq \frac{e^{aR}}{e^R - 1}$$

$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ , cioè la lunghezza di un lato di un triangolo è sempre maggiore o uguale alla differenza degli altri due.

e quindi tende a zero per  $R \rightarrow \infty$  essendo  $a < 1$ . Analogamente, il modulo della funzione integranda del secondo integrale in  $dy$  è minore di

$$\frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}}$$

e quindi tende a zero per  $R \rightarrow \infty$ . Allora, passando al limite  $R \rightarrow \infty$  nella (1.12),

$$(1 - e^{ia2\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} = 2\pi i (-e^{a\pi i}),$$

da cui

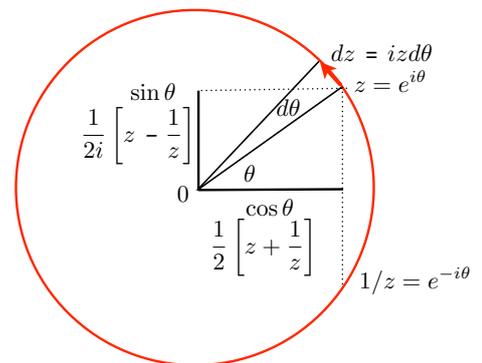
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} = \pi \frac{-2ie^{a\pi i}}{1 - e^{ia2\pi}} = \frac{2i\pi}{e^{a\pi i} - e^{-i2\pi}} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

(IV)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta}$$

Integrali di questo tipo si riconducono a integrali nel piano complesso mediante le sostituzioni riassunte dalla figura 8.6.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} &= \oint_C \frac{dz/iz}{3 - 2(z + z^{-1})/2 + (z - z^{-1})/2i} \\ &= \oint_C \frac{2dz}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} \end{aligned}$$



I poli di

$$f(z) = \frac{2}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$$

sono poli semplici,  $z = 2 - i$  e  $z = (2 - i)/5$ . Solo  $(2 - i)/5$  è all'interno di  $C$ . Il residuo in  $(2 - i)/5$  è  $1/(2i)$ , quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} = \pi$$

1.8.2.  $\square$

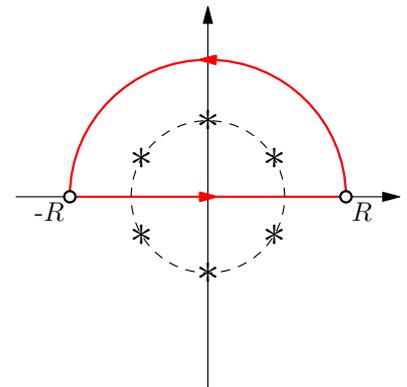
(I) Per il calcolo dell'integrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$

si si osservi che, essendo la funzione integranda pari,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

Per il calcolo di questo integrale si considera il contorno della figura a lato. Zeri di  $1+x^6 = 0$ :  $e^{\pi i/6}, e^{3\pi i/6}, e^{5\pi i/6}, e^{7\pi i/6}, e^{9\pi i/6}, e^{11\pi i/6}$ . Poli semplici di  $f(z) = 1/(1+z^6)$ . Solo i poli  $e^{\pi i/6}, e^{3\pi i/6}, e^{5\pi i/6}$  si trovano dentro  $C$ . Usando la regola dell'Hospital si trova



$$\begin{aligned} \text{Res}(e^{\pi i/6}) &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/6}} \left[ (z - e^{\pi i/6}) \frac{1}{1+z^6} \right] = \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-5\pi i/6} \\ \text{Res}(e^{3\pi i/6}) &= \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/6}} \left[ (z - e^{3\pi i/6}) \frac{1}{1+z^6} \right] = \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-5\pi i/2} \\ \text{Res}(e^{5\pi i/6}) &= \lim_{z \rightarrow e^{5\pi i/6}} \left[ (z - e^{5\pi i/6}) \frac{1}{1+z^6} \right] = \lim_{z \rightarrow e^{5\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-25\pi i/6} \end{aligned}$$

Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = 2\pi i \frac{1}{6} \left( e^{-5\pi i/6} + e^{-5\pi i/2} + e^{-25\pi i/6} \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Quindi,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}$$

(II) Per dimostrare che

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a \cos x + x \sin x}{x^2 + a^2} dx = 2\pi e^{-a}$$

scomponiamo  $I$  nella somma di due integrali

$$I = a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx \equiv I_1 + I_2$$

Consideriamo il primo integrale

$$I_1 = a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx.$$

Non possiamo direttamente chiudere sul contorno della a lato perché

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

diverge lungo la direzione positiva dell'asse immaginario (a causa di  $e^{-iz}$ ). Consideriamo invece lungo lo stesso contorno, l'integrale

$$J_1 = \oint \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} dz = \oint \frac{\cos z}{z^2 + a^2} dz + i \oint \frac{\sin z}{z^2 + a^2} dz$$

Essendo il seno una funzione dispari, il secondo integrale dà contributo nullo quando è integrato lungo l'asse reale. Quindi  $I_1 = aJ_1$ , nel limite  $R \rightarrow \infty$ , in quanto l'integrale lungo  $C_R^+$  si annulla, nel limite  $R \rightarrow \infty$ , come si può verificare direttamente, oppure utilizzando il Lemma di Jordan.

Calcoliamo  $J_1$ . Polo in  $ia$ . Residuo:

$$\frac{e^{i(ia)}}{2ia} = \frac{e^{-a}}{2ia}$$

Quindi  $J_1 = (2\pi i)e^{-a}/(2ia) = \pi e^{-a}/a$ , da cui

$$I_1 = aJ_1 = \pi e^{-a}$$

Per il secondo integrale possiamo procedere in modo analogo oppure osservare che

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = -\frac{d}{d\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx \Big|_{\lambda=1}$$

Ma l'integrale

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx$$

è completamente analogo a  $J_1$ , calcolato poc'anzi e vale quindi

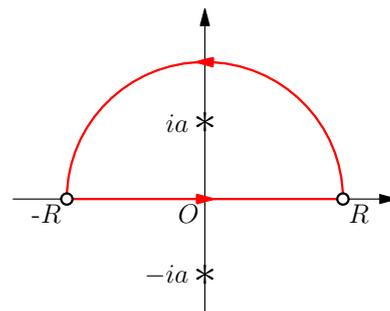
$$F(\lambda) = \pi \frac{e^{-\lambda a}}{a}$$

Allora

$$I_2 = -F'(\lambda) \Big|_{\lambda=1} = \pi e^{-a}$$

In conclusione

$$I = I_1 + I_2 = \pi e^{-a} + \pi e^{-a} = 2\pi e^{-a}$$



(III) Per calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$$

si procede alla sostituzione usuale per integrali di questo tipo (figura 8.6):  $z = e^{i\theta}$ ,  $dz = izd\theta$ ,  $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ . Si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2i} \oint_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)}$$

Polo di ordine 3 in  $z = 0$  e polo semplice in  $z = 1/2$ . Risultato  $\pi/12$ .

(IV) Per quel che riguarda

$$I(n, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx, \quad n \text{ intero positivo}, \quad a \text{ reale positivo}$$

bastano i primi della lista, ottenuti per derivazione sotto il segno di integrale, poi si indovina facilmente lo schema

$$\begin{aligned} I(0, a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ I(1, a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1}{a}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \\ I(2, a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1}{a^2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \\ I(3, a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1}{a^3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \\ I(n, a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n a^n} \end{aligned}$$

(V) Poiché

$$f(z) = \frac{1}{\cosh z}$$

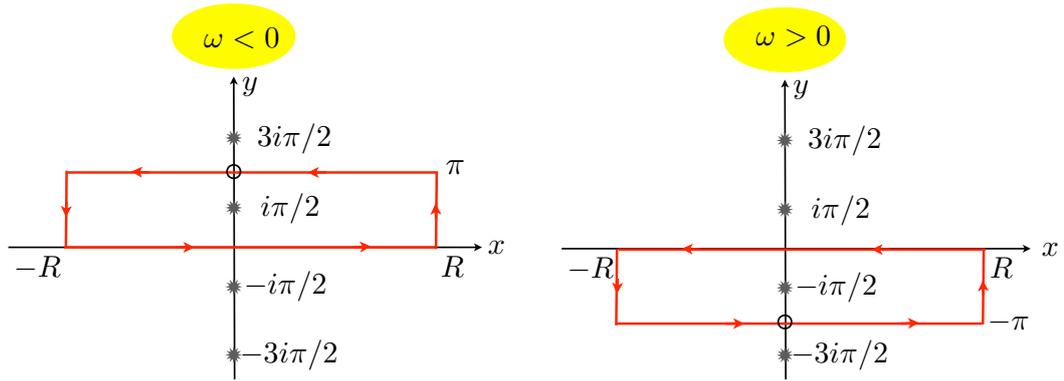
ha infiniti poli nei punti

$$z = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi i$$

per calcolare

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx$$

converrà assumere, rispettivamente per  $\omega < 0$  e  $\omega > 0$ , i cammini di integrazione indicati in figura:



Si osservi la scelta di far passare i cammini per  $\pi$  e  $-\pi$ . Si arriva a questa scelta per tentativi ed errori, come la scelta che meglio facilita il calcolo (sfruttando la periodicit  della funzione).

Il residuo della funzione integranda per  $z = i\pi/2$     $-ie^{\omega\pi/2}$  e quello per  $z = -i\pi/2$     $+ie^{-\omega\pi/2}$ . Si ha quindi, per  $\omega < 0$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)} dx = \frac{1}{2\pi} (2\pi i) \text{Res} = e^{\omega\pi/2}$$

Adesso sviluppiamo il primo membro

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx + \frac{e^{\omega\pi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx$$

(si osservi il cambiamento di segno  $\cosh(x+i\pi) = -\cosh(x)$ ).

Raccogliamo a secondo membro l'integrale cercato,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)} dx = (1 + e^{\omega\pi}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx$$

Si   cos  determinato che

$$(1 + e^{\omega\pi}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx = e^{\omega\pi/2}$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx = \frac{e^{\omega\pi/2}}{1 + e^{\omega\pi}}, \quad \omega < 0$$

Procedendo in maniera analoga per il secondo cammino, si trova

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx = \frac{e^{-\omega\pi/2}}{1 + e^{-\omega\pi}}, \quad \omega > 0$$

(VI) Si vuole mostrare che

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx = \frac{\pi}{2} \tanh \frac{a\pi}{2}$$

Un trucco simile a quello del problema precedente: sfortunatamente, il cammino  $y = \pi i$  incontra il polo  $z = \pi i$ . Ma questo non è un problema: basta prendere un cammino semicircolare che lo aggiri e poi far tendere a zero il suo raggio. (Con il senno di lezioni successive, possiamo evitare questo, perché impareremo che un polo lungo il cammino contribuisce con metà residuo). Il residuo della funzione nel polo è  $-i \sinh a$ .

Dopo aver dimostrato che i contributi verticali tendono a zero, possiamo allora integrare lungo il rettangolo e ottenere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a(x + \pi i)}{\sinh(x + \pi i)} dx = \pi \sinh a$$

$$(1 + \cosh a\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax \sinh a}{\sinh x} dx = \pi \sinh a$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx = \pi \frac{\sinh a}{1 + \cosh a\pi}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx = \frac{\pi}{2} \frac{\sinh a}{(1 + \cosh a\pi)}$$

(anche se non sembra è quello che si voleva dimostrare).

(VII) Si vuole dimostrare che

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

La funzione integranda è singolare in  $-1$  e  $+1$  (figura a lato).

Passando alla multifunzione complessa

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+z)^2(1-z)}}$$

si vede che essa ha punti di diramazione in  $-1$  e  $1$ . Con riferimento alla figura a lato, sia

$$z = -1 + r_1 e^{i\theta_1} = 1 + r_2 e^{i\theta_2}$$

e scegliamo un ramo in cui

$$f(z) = r_1^{-2/3} r_2^{-1/3} e^{-i(2/3)\theta_1} e^{-i(1/3)\theta_2}$$

Osserviamo che un giro intorno ad entrambi i punti di diramazione non fa cambiare ramo (perché  $(2/3)(\theta_1 + 2\pi) + (1/3)(\theta_2 + 2\pi) = (2/3)\theta_1 + (1/3)\theta_2 + 2\pi$ ). Possiamo quindi scegliere come taglio il segmento tra  $-1$  e  $1$ , con  $0 \leq \theta_1 < 2\pi$  e

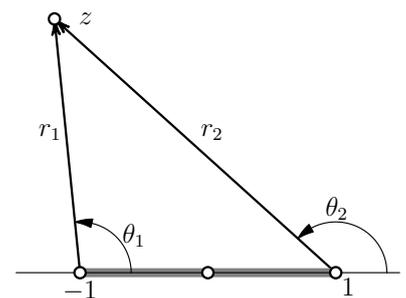
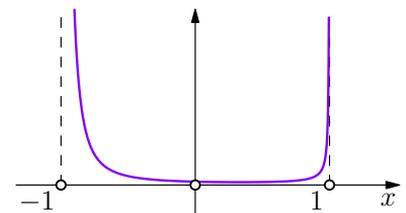
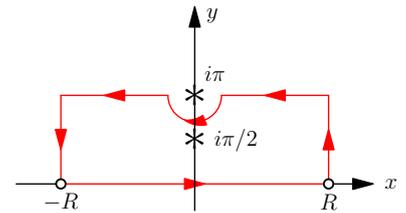


Figura 1.4: Punti di diramazione e taglio.

$-\pi < \theta_2 \leq \pi$ . In questo ramo, nel limite da sopra a  $x \in (-1, 1)$ , si ha  $\theta_1 = 0$  e  $\theta_2 = \pi$  e quindi

$$f(x + i\epsilon) = r_1^{-2/3} r_2^{-1/3} e^{-i\pi/3} = \frac{e^{-i\pi/3}}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}$$

Nel limite da sotto, si ha  $\theta_1 = 2\pi$  e  $\theta_2 = -\pi$  e quindi

$$f(x - i\epsilon) = e^{-i4\pi/3} e^{i\pi/3} r_1^{-2/3} r_2^{-1/3} = e^{-i\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}$$

Possiamo allora integrare la funzione  $f(z)$  lungo il cammino  $L$  della figura 8.11, riportata qui a lato.

Osserviamo che, pur essendo la funzione singolare, non ci sono residui nei punti di diramazione: questo segue dal fatto generale che

$$\oint \frac{1}{z^p} dz$$

è nullo per  $p < 1$ . Infatti, per un cammino circolare di raggio  $\epsilon$

$$\oint \frac{1}{z^p} dz = \int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} \epsilon^{-p} \epsilon e^{i\theta} d\theta \propto \epsilon^{1-p} \rightarrow 0 \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0$$

Essendo nulli gli integrali lungo i piccoli cerchi, si ha

$$\begin{aligned} \oint_L f(z) dz &= -e^{-i\pi/3} I + e^{-i\pi} I = e^{-i\pi} (-e^{i2\pi/3} + 1) I \\ &= (e^{i2\pi/3} - 1) I, \end{aligned}$$

(i segni sono dovuti all'orientazione di  $L$ : sopra il taglio, il cammino da 1 a  $-1$ , sotto il taglio, da  $-1$  a 1). Ne segue che

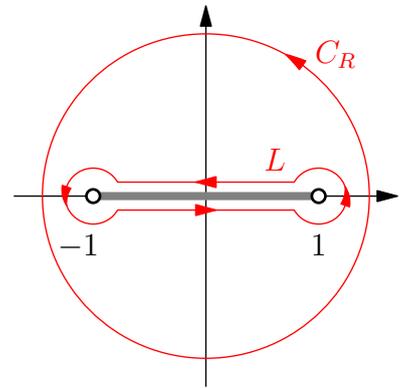
$$I = \frac{1}{e^{i2\pi/3} - 1} \oint_L f(z) dz.$$

Poiché non ci sono singolarità tra  $L$  e  $C_R$ , possiamo deformare il contorno d'integrazione da  $L$  a  $C_R$ , un cerchio di raggio  $R > 1$ , come mostrato in figura, e ottenere

$$I = \frac{1}{e^{i2\pi/3} - 1} \oint_{C_R} f(z) dz.$$

Essendo la funzione integranda regolare in ogni regione finita al di fuori dal cerchio, calcoliamo questo integrale in termini di residuo della funzione all'infinito. Dalla sezione 7.8,

$$I = (2\pi i) \frac{1}{e^{i2\pi/3} - 1} \text{Res} \left[ 0, \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) \right].$$



**N. B.** Si tenga presente questo fatto anche per altri problemi.

Ma

$$\begin{aligned} \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w^2}\right) &= \frac{1}{w^2} \left(1 + \frac{1}{w}\right)^{-2/3} \left(1 - \frac{1}{w}\right)^{-1/3} \\ &= \frac{1}{w^2} w^{2/3} w^{1/3} (1+w)^{-2/3} (1-w)^{-1/3} \\ &= \frac{1}{w} (w+1)^{-2/3} (w-1)^{-1/3} \\ &= \frac{1}{w} \left(1 - \frac{2}{3}w + \dots\right) (-1)^{-1/3} \left(1 + \frac{1}{3}w + \dots\right) \end{aligned}$$

Poiché il coefficiente di  $1/w$  è  $(-1)^{-1/3}$ , questo è il residuo cercato. Dalla figura 1.4,  $z-1 = r_2 e^{i\theta_2}$ , da cui  $(-1)^{-1/3} = e^{-i\pi/3}$  nel piano  $z$ . Nel piano  $w = 1/z$ , si avrà  $(-1)^{-1/3} = e^{i\pi/3}$ . Quindi

$$I = (2\pi i) \frac{1}{e^{i2\pi/3} - 1} e^{i\pi/3} = \pi \frac{2i}{e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}} = \frac{\pi}{\sin \pi/3} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

1.8.3. □

(I)  $\pi/2$

(II)  $2\pi/\sqrt{5}$

(III)  $-4\pi/3$

(IV)  $\pi/6$

(V) Dal problema 8.2 (V), l'integrale richiesto è  $2\pi g(0) = 2\pi \cdot 1/2 = \pi$ .

(VI) Si consideri

$$\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz,$$

dove  $C$  è il contorno della figura a lato.

L'integrando ha poli semplici in  $-1 \pm 2i$ , ma solo  $-1 + 2i$  è all'interno di  $C$ .

$$\text{Res} = \frac{(-1 + 2i)e^{i\pi(-1+2i)}}{2(-1 + 2i) + 2} = (-1 + 2i) \frac{e^{-i\pi - 2\pi}}{4i}.$$

Allora

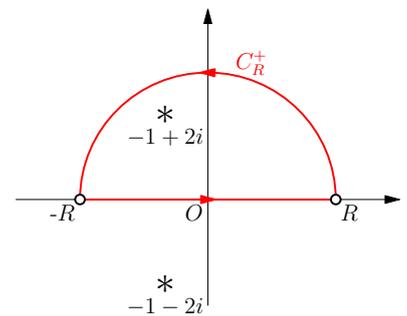
$$\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz = 2\pi i (-1 + 2i) \frac{e^{-i\pi - 2\pi}}{4i} = \frac{\pi}{2} (1 - 2i) e^{-2\pi}.$$

La funzione tende a zero per  $z$  che va all'infinito, quindi il contributo del semicerchio  $C_R^+$  è nullo nel limite  $R \rightarrow \infty$  e quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos \pi x}{x^2 + 2x + 5} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi} - i\pi e^{-2\pi}$$

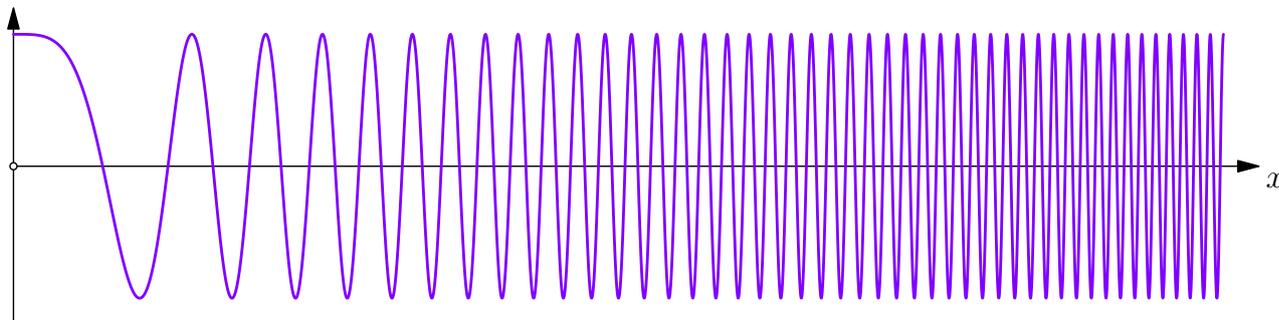
L'integrale richiesto è  $-\pi e^{-2\pi}$  e, come bonus, si è ottenuto anche il valore di un altro integrale.

**N. B.** Calcolare il residuo in un polo  $a$  significa *sempre* estrarre il coefficiente di  $1/(z-a)$ .



## 1.8.4. □

- (I) In un certo senso, c'è del miracoloso nel fatto che l'integrale di  $\cos(x^2)$  converga. Infatti,  $\cos(x^2)$ , il cui grafico è riportato sotto, non va a zero quando  $x$  va all'infinito.



Ci deve essere quindi essere un'esatta cancellazione tra parti positive e negative che produce un valore finito dell'area.

Un modo per valutare l'integrale di  $\cos(x^2)$  e di  $\sin(x^2)$  è di incominciare con la formula di Eulero,

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx + i \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} e^{ix^2} dx,$$

che è l'integrale della funzione complessa  $e^{iz^2}$  lungo l'asse reale positivo. Si tratta adesso di vedere se esistono modi di chiudere il cammino e usare il teorema dei residui. Consideriamo il contorno nel piano complesso illustrato nella figura a lato.

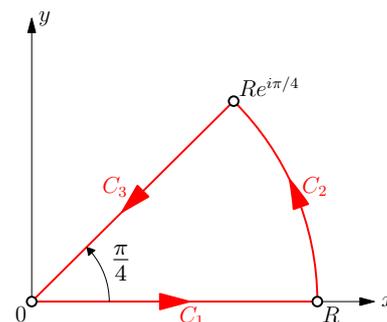
Questo contorno ha tre caratteristiche che lo rendono speciale. Primo, l'integrale lungo  $C_3$  è una fase che moltiplica l'integrale della gaussiana. Infatti, posto  $z = re^{i\pi/4}$  lungo questo cammino,

$$\begin{aligned} \int_{C_3} e^{iz^2} dz &= \int_{r=R}^0 e^{i(re^{i\pi/4})^2} d(re^{i\pi/4}) \\ &= -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{i(r^2i)} dr \\ &= -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-r^2} dr \end{aligned}$$

Quindi nel limite  $R \rightarrow \infty$

$$\int_{C_3} e^{iz^2} dz = -e^{i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = -e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Secondo, l'integrale di  $e^{iz^2}$  lungo  $C_2$ , l'arco di cerchio da  $R$  a  $Re^{i\pi/4}$ , nel limite  $R \rightarrow \infty$ , è nullo. Infatti,  $z = Re^{i\pi/4}$  lungo



questo cammino,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi/4} e^{(iR e^{i\theta})^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2i\theta}} i\theta R d\theta \right| \\ &= \left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} i\theta R d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\theta} R d\theta \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{perché } \cos 2\theta > 0 \text{ per } 0 < \theta < \pi/4) \end{aligned}$$

Terzo, la funzione  $e^{iz^2}$  è analitica nella regione delimitata da  $C_1 + C_2 + C_3$ . Allora

$$\int_{C_1} + \int_{C_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{C_1} = - \int_{C_3}$$

e quindi

$$\int_0^{\infty} e^{ix^2} dx = e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

equivalentemente,

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx + i \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

che è proprio quello che si voleva dimostrare.

**N. B.** L'integrale

$$\int_0^{\infty} e^{ix^2} dx = e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

è detto *integrale di Fresnel*. Si osservi che, procedendo in modo analogo a sopra, si perviene alla formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax^2} dx = e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{\frac{i\pi}{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{(-ia)}},$$

che può essere compresa come risultante dal cambiamento di variabili

$$x = e^{i\pi/4} y,$$

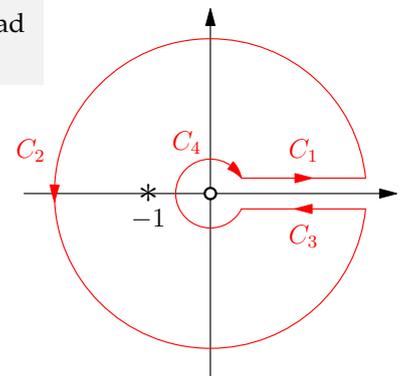
corrispondente ad una rotazione del contorno di  $\pi/4$ . Questo giustifica il passaggio da certi integrali reali che coinvolgono gaussiane, ad altri complessi, mediante la sostituzione  $a \rightarrow -ia$ .

(II) Si consideri

$$\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z} dz.$$

Poichè  $z = 0$  è un punto di diramazione, consideriamo il contorno  $C$  nella figura a lato. L'integrando ha un polo semplice in  $z = -1 = e^{i\pi}$ , il cui residuo è  $e^{i(p-1)\pi}$ . Quindi

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = 2\pi i e^{i(p-1)\pi}$$



Gli integrali  $\oint_{C_2}$  e  $\oint_{C_4}$ , rispettivamente lungo cerchi di raggi  $\epsilon$  e  $R$  vanno a zero per  $\epsilon \rightarrow 0$  ( $p$  tra 0 e 1) e  $R \rightarrow \infty$  (poiché  $p$  è strettamente tra 0 e 1). Detta  $z = x$  la variabile lungo  $C_1$ , la variabile lungo  $C_3$  sarà  $z = e^{2\pi i}x$ , dato che l'argomento di  $z$  cresce di  $2\pi$  dopo un giro completo. Allora, detto

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$$

l'integrale che si vuole calcolare, nel limite si ha

$$\int_{C_1} + \int_{C_3} = I - e^{2\pi i(p-1)}I = 2\pi i e^{i(p-1)\pi},$$

da cui

$$I = \frac{2\pi i e^{i(p-1)\pi}}{1 - e^{2\pi i(p-1)}} = \frac{\pi}{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

(III) Il grafico della funzione  $\ln x / (1 + x^2)$  è riportato a lato. Viene chiesto di mostrare che c'è esatta cancellazione tra contributo positivo e negativo all'area.

Un modo (un po' indiretto) di calcolare l'integrale è di considerare

$$\oint_C \frac{\text{Log}(z)^2}{1+z^2} dz$$

per il percorso in figura a lato. La ragione è che l'integrazione lungo  $C_3$  coinvolge un  $(\text{Log}x + i2\pi)^2$ , da cui, sviluppando il quadrato si ottiene il termine  $\text{Log}x$  che si vuole calcolare. Più precisamente, dopo aver calcolato i residui in  $i$  e  $-i$ , che sono rispettivamente

$$\frac{1}{2i} \left(\frac{i\pi}{2}\right)^2 \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2i} \left(\frac{i\pi}{2}\right)^2,$$

e aver valutato che gli integrali lungo il cerchio piccolo e quello grande non contribuiscono nei limiti  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow \infty$ , per l'integrale di contorno si ottiene

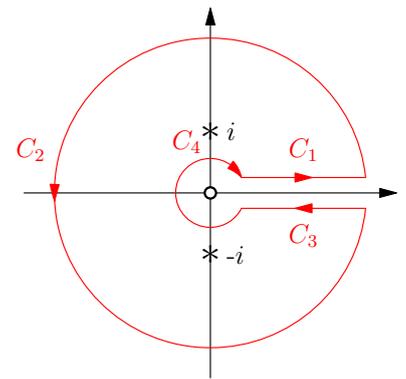
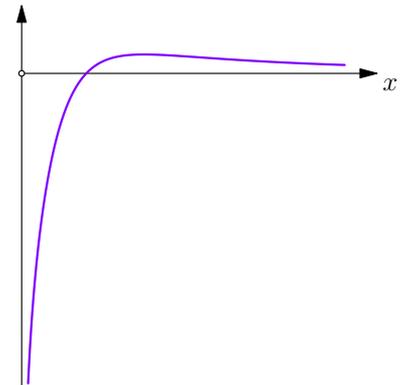
$$\oint_C \frac{\text{Log}(z)^2}{1+z^2} dz = \int_0^\infty \frac{\text{Log}(x)^2}{1+x^2} dx - \int_0^\infty \frac{(\text{Log}x + i2\pi)^2}{1+x^2} dx = 2\pi i \sum \text{Res} = 2\pi^3.$$

Ma

$$\int_0^\infty \frac{(\text{Log}x + i2\pi)^2}{1+x^2} dx = \int_0^\infty \frac{(\text{Log}x)^2}{1+x^2} dx + \int_0^\infty \frac{i2\pi \text{Log}x}{1+x^2} dx + \int_0^\infty \frac{-4\pi^2}{1+x^2} dx$$

Quindi,

$$-\int_0^\infty \frac{i2\pi \text{Log}x}{1+x^2} dx + 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi^3.$$



L'integrale reale vale  $\pi/2$ , quindi l'uguaglianza risulta verificata se la parte immaginaria a primo membro è nulla, cioè se

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{1+x^2} dx = 0$$

(IV) È tempo di fare mente locale sul seguente fatto:

Mente il logaritmo, come multifunzione, preserva la proprietà fondamentale del logaritmo reale

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b),$$

la sua parte principale

$$\operatorname{Log}(z) = \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z)$$

non gode in generale di questa proprietà,

$$\operatorname{Log}(ab) \neq \operatorname{Log}(a) + \operatorname{Log}(b)$$

( $a = -1$  e  $b = i$  fornisce un controesempio).

Tuttavia, si ha

$$\operatorname{Log}(i-x) + \operatorname{Log}(i+x) = \operatorname{Log}(i^2 - x^2) = \operatorname{Log}(x^2 + 1) + \pi i \quad (1.13)$$

Questa identità suggerisce di considerare l'integrale di contorno

$$\oint_C \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1} dz$$

per il contorno  $C$  in figura a lato. Il residuo in  $i$  è

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1} = \frac{\operatorname{Log}(2i)}{2i}$$

e dunque

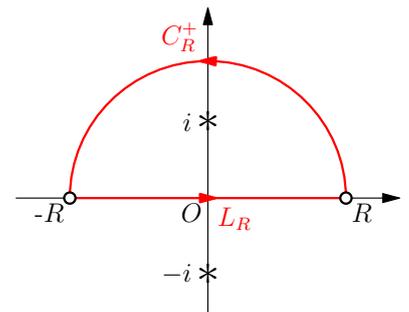
$$\oint_C \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1} dz = 2\pi i \frac{\operatorname{Log}(2i)}{2i} = \pi \left[ \operatorname{Log} 2 + i \frac{\pi}{2} \right] = \pi \operatorname{Log} 2 + \frac{1}{2} \pi^2 i.$$

L'integrale su  $C_{R^+}$  tende a zero quando  $R$  va all'infinito. Quindi

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Log}(x+i)}{x^2+1} dx + \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log}(x+i)}{x^2+1} dx = \pi \operatorname{Log} 2 + \frac{1}{2} \pi^2 i.$$

cambiando  $x$  in  $-x$  nel primo integrale, si ottiene

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log}(i-x)}{x^2+1} dx + \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log}(x+i)}{x^2+1} dx = \pi \operatorname{Log} 2 + \frac{1}{2} \pi^2 i.$$



tenuto conto della (1.13),

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Log}(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + i\pi \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi \text{Log}2 + \frac{1}{2}\pi^2 i.$$

Poiché il secondo integrale a primo membro è pari a  $\pi/2$ , uguagliando parti reale e immaginaria della precedente equazione, si ottiene

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Log}(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \pi \text{Log}2$$

1.8.5.  $\square$

(I)

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s-2)^2} \right\} (t) = \sum \text{Res} \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}$$

$s = -1$  polo semplice,

$$\text{Res} = \frac{e^{-t}}{9}$$

$s = 2$ , polo doppio

$$\begin{aligned} \text{Res} &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left\{ (s-2)^2 \left[ \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} \right] \right\} = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d}{ds} \left[ \frac{e^{st}}{s+1} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{(s+1)te^{st} - e^{st}}{(s+1)^2} \\ &= \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t} \end{aligned}$$

Allora

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s-2)^2} \right\} (t) = \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t}$$

(II) Dobbiamo calcolare

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right\}$$

Si ha

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{(s+i)^2(s-i)^2}.$$

La trasformata di Laplace inversa è la somma dei residui di

$$\frac{e^{st}}{(s^2+1)^2}$$

nei poli  $\pm i$  che sono ciascuno di ordine 2. Il residuo in  $s = i$  è

$$\lim_{s \rightarrow i} \frac{d}{ds} \left[ (s-i)^2 \frac{e^{st}}{(s^2+1)^2} \right] = -\frac{1}{4}te^{it} - \frac{1}{4}ie^{it}.$$

Il residuo in  $s = -i$  è

$$\lim_{s \rightarrow i} \frac{d}{ds} \left[ (s+i)^2 \frac{e^{st}}{(s^2+1)^2} \right] = -\frac{1}{4}te^{-it} - \frac{1}{4}ie^{-it}.$$

(che si sarebbe potuto anche ottenere direttamente dal residuo in  $s = i$ , sostituendo  $i$  con  $-i$ ). Allora

$$\begin{aligned} \sum \text{Res} &= -\frac{1}{4}te^{it} - \frac{1}{4}ie^{it} - \frac{1}{4}te^{-it} - \frac{1}{4}ie^{-it} \\ &= \frac{1}{2}t \cos t + \frac{1}{2} \sin t = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t) \end{aligned}$$

(III) Essendo  $s = 0$  un punto di diramazione, si può applicare la formula di inversione

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{zt} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{zt-a\sqrt{z}}}{z} dz,$$

a patto di usare il contorno della figura 8.12, che riportiamo a lato.

Si osservi che il taglio per la radice è tra  $-\infty$  e  $0$ : appena sopra il taglio, lungo  $M$ ,  $z = e^{i\pi}|x|$  e  $\sqrt{z} = \sqrt{|x|}e^{i\pi/2} = i\sqrt{|x|}$ ; appena sotto il taglio, lungo  $N$ ,  $z = e^{-i\pi}|x|$  e  $\sqrt{z} = \sqrt{|x|}e^{-i\pi/2} = -i\sqrt{|x|}$ .

Poiché la funzione è analitica all'interno del contorno, si ha

$$\oint_L = - \left[ \int_{C_R^+} + \int_M + \int_{C_\epsilon} + \int_N + \int_{C_R^-} \right]$$

Nel limite  $R \rightarrow \infty$  i due integrali  $\int_{C_R^+}$  e  $\int_{C_R^-}$  danno contributo nullo. Valutiamo i tre integrali rimanenti, nel limite  $R \rightarrow \infty$  e  $\epsilon \rightarrow 0$ .

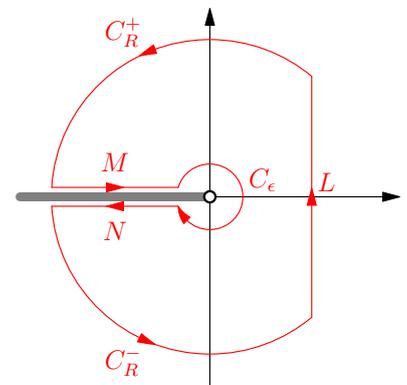
$$\begin{aligned} \int_M \frac{e^{zt-a\sqrt{z}}}{z} dz &= \int_\infty^0 \frac{e^{xe^{i\pi}-a(xe^{i\pi})^{1/2}}}{x} dx = \int_\infty^0 \frac{e^{-xt-ai\sqrt{x}}}{x} dx \\ \int_N \frac{e^{zt-a\sqrt{z}}}{z} dz &= \int_\infty^0 \frac{e^{xe^{-i\pi}-a(xe^{-i\pi})^{1/2}}}{x} dx = \int_\infty^0 \frac{e^{-xt+ai\sqrt{x}}}{x} dx \\ \int_{C_\epsilon} \frac{e^{zt-a\sqrt{z}}}{z} dz &= i \int_\pi^{-\pi} e^{(e^{i\theta})t-a\sqrt{\epsilon}e^{i\theta/2}} d\theta \rightarrow -2\pi i \text{ per } \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ne segue che

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L = \frac{-1}{2\pi i} \left[ \int_M + \int_{C_\epsilon} + \int_N \right] = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xt} \sin a\sqrt{x}}{x} dx.$$

Poniamo

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xt} \sin a\sqrt{x}}{x} dx.$$



Mediante sostituzione  $x = u^2$ ,  $I$  diventa

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2 t} \sin au}{u} du.$$

Derivando rispetto a  $a$ , otteniamo

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u^2 t} \cos au du = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{-a^2/4t} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}.$$

Quindi, usando la condizione  $I = 0$  per  $a = 0$ ,

$$I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t} da = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a/(2\sqrt{t})} e^{-u^2} du = \operatorname{erf} \left( \frac{a}{2\sqrt{t}} \right).$$

Allora

$$F(t) = 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{a}{2\sqrt{t}} \right) = \operatorname{erfc} \left( \frac{a}{2\sqrt{t}} \right)$$