

1.9

1.9.1. \square

Se $\oint_C f(z)dz = 0$ indipendentemente da C , allora ne segue che

$$F(z) = \int_a^z f(z)dz$$

è indipendente dal percorso che unisce a e z , purché tale percorso si trovi tutto dentro la regione \mathcal{R} semplicemente connessa dove vale $\oint_C f(z)dz = 0$. Ma allora

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

Quindi $F(z)$ è analitica e $F'(z) = f(z)$. Poiché se una funzione è analitica lo sono anche le sue derivate (sezione 9.2), anche $f(z)$ è analitica, che è quello che si voleva dimostrare.

1.9.2. \square

Consideriamo $\oint_C F(z)dz$ per una qualunque curva semplice chiusa contenuta in \mathcal{R} . Poiché la serie che definisce $F(z)$ è uniformemente convergente possiamo scambiare la somma con l'integrale:

$$\oint_C F(z)dz = \oint_C \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_C f_n(z)dz = 0$$

perché le funzioni f_n sono analitiche. Per il teorema di Morera, concludiamo che $F(z)$ è analitica, che è quanto si voleva dimostrare.

1.9.3. \square

Dalla (9.6) si ha

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Mediante cambiamento di variabili $z - a = e^{it}$, si ottiene

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-nit} f(a + e^{it}) dt$$

che è quanto si voleva dimostrare.

1.9.4. \square

(a) Scomponendo in fratti semplici,

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1/2}{z+1} - \frac{1/2}{z+3}.$$

Se $|z| > 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1/2}{z+1} &= \frac{1}{2z} \left[\frac{1}{1+z^{-1}} \right] = \frac{1}{2z} \left[1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^4} + \dots \end{aligned}$$

Se $|z| < 3$,

$$\begin{aligned}\frac{1/2}{z+3} &= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{1+z/3} \right] = \frac{1}{6} \left[1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} - \frac{z^3}{3^3} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{6} - \frac{z}{6 \times 3} + \frac{z^2}{6 \times 3^2} - \frac{z^3}{6 \times 3^3} + \dots\end{aligned}$$

La serie di Laurent richiesta è dunque

$$\dots - \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{6 \times 3} - \frac{z^2}{6 \times 3^2} + \frac{z^3}{6 \times 3^3} + \dots$$

(b) Se $|z| > 1$, si ha, come prima

$$\frac{1/2}{z+1} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^4} + \dots$$

Naturalmente, questa serie vale, *a fortiori*, per $|z| > 3$. Per l'altro fratto semplice, per $z > 3$ si ha Se $|z| > 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1/2}{z+3} &= \frac{1}{2z} \left[\frac{1}{1+3z^{-1}} \right] = \frac{1}{2z} \left[1 - \frac{3}{z} + \frac{3^2}{z^2} - \frac{3^3}{z^3} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2z} - \frac{3}{2z^2} + \frac{3^2}{2z^3} - \frac{3^3}{2z^4} + \dots\end{aligned}$$

Quindi, per sottrazione delle singole serie,

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{13}{z^4} - \frac{40}{z^5} + \dots$$

(c) Sia $z+1 = u$. Allora

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z+1)(z+3)} &= \frac{1}{u(u+2)} = \frac{1}{2u(1+u/2)} \\ &= \frac{1}{2u} \left[1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{8} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z+1) - \frac{1}{16}(z+1)^2 + \dots\end{aligned}$$

valevole per $|u| < 2$, cioè $0 < |z+1| < 2$.

(d) Per $|z| < 1$, si ha la serie di Taylor ottenuta sottraendo dalla serie di Taylor per $(1/2)/(z+1)$ quella per $(1/2)/(z+3)$ già ottenuta al punto (a). Il risultato è

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \frac{40}{81}z^3 + \dots$$

1.9.5. □ Osserviamo che

$$F(z) = 1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + z^{32} \dots = z + 1 + z^2 \left[1 + z^4 + z^8 + z^{16} \dots \right].$$

Allora

$$\begin{aligned} F(z) &= z + F(z^2) \\ F(z) &= z + z^2 + F(z^4) \\ F(z) &= z + z^2 + z^4 + F(z^8) \\ &\dots = \dots \end{aligned}$$

Da queste relazioni risulta che i valori di z tali che $z = 1, z^2 = 1, z^4 = 1, \dots$ sono tutti singolarità di $F(z)$ in quanto $F(1) = \infty$. Ma queste singolarità riempiono densamente il cerchio unitario $|z| = 1$ e impediscono il prolungamento analitico oltre di esso della funzione.

1.9.6. \square

(i) Integrando per parti (trasformata di Laplace), si ottiene

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} t^3 e^{-zt} dt = \frac{6}{z^4} \quad \text{se } \operatorname{Re}(z) > 0$$

(ii) La funzione $F_2(z) = 6/z^4$ è analitica ovunque eccetto in $z = 0$ e coincide con $F_1(z)$ per $\operatorname{Re}(z) > 0$. Quindi è il prolungamento analitico di F_1 .