

2.10 COMPLEMENTI

2.10.1 Geometria delle serie di potenze

Una serie di numeri complessi, per quanto infinita, è pur sempre una somma di vettori nel piano. È dunque utile farsene una rappresentazione geometrica, nello stesso spirito con cui Feynman, nel capitolo 30 del volume 1 delle sue "Lectures on Physics", determina la diffrazione di una grata sommando geometricamente n sorgenti con stessa differenza di fase tra termini successivi, e stessa intensità.

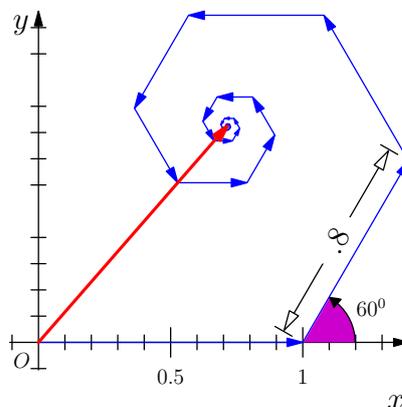
Siamo interessati al caso in cui n diventa infinitamente grande, e quindi al caso in cui la lunghezza dei vettori (= modulo = norma) varia, in particolare, diventa sempre più piccola man mano che n aumenta. Come nel caso della diffrazione di una grata, consideriamo il caso più semplice di serie con stessa differenza di fase tra termini successivi, cioè la serie geometrica

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

La studieremo graficamente con un programma di grafica vettoriale (Asymptote), usando il seguente codice elementare:

```
pair O= (0,0); //origine nel piano complesso
pair z = r* dir(theta); // r e theta sono rispettivamente modulo e angolo di z
int m ; // numero di iterazioni (m-esima somma parziale della serie)
pair [ ] s= new pair[m];
s[0] = (1,0);
for(int n=1; n<=m-1 ; ++n)
s[n] = s[n-1] + z^n ;
for(int n=1; n<=m-1 ; ++n)
draw(s[n-1]--s[n], Arrow);
```

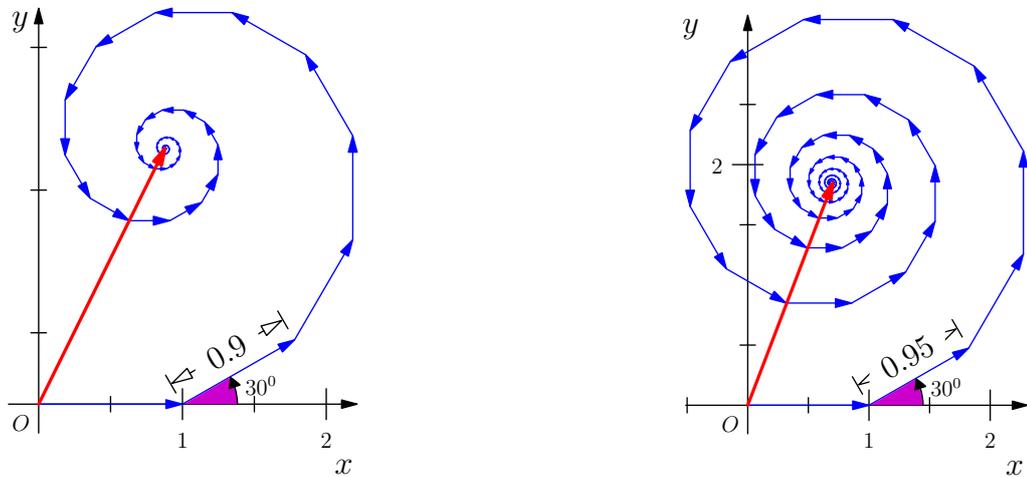
Incominciamo con un vettore dentro il disco unitario. Abbiamo scelto $r = 0.8$ e $\theta = 60^\circ$. Ecco la figura che si ottiene



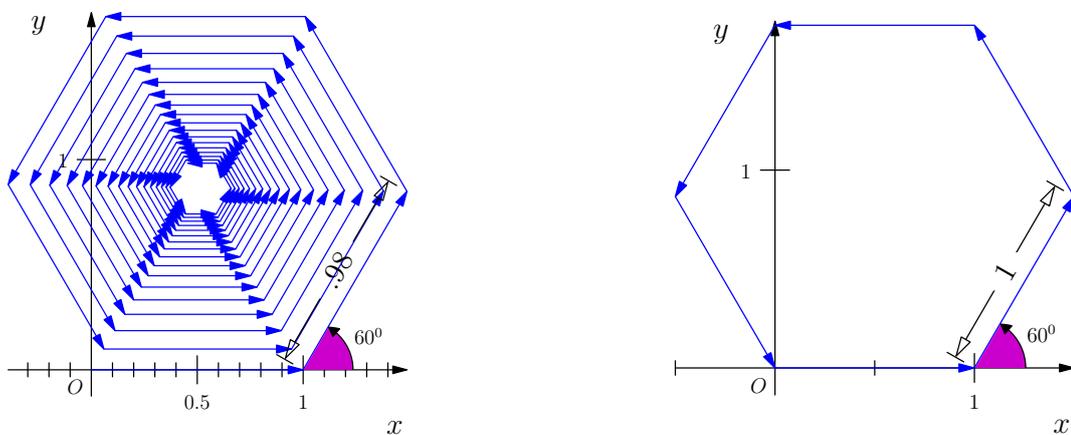
Il primo vettore della serie è 1 , il secondo è z . In figura ne abbiamo indicato la lunghezza. Il vettore in rosso denota la somma dei vettori (solita regola del parallelogramma). Facendo variare m si vede che il risultato numerico si stabilizza attorno alla somma

$$\frac{1}{1 - 0.8\angle(60^\circ)}$$

Adesso facciamo avvicinare z al bordo del disco. Ecco i risultati per $r = 0.9$ (figura a sinistra) e $r = 0.95$ (e $\theta = 30^\circ$):

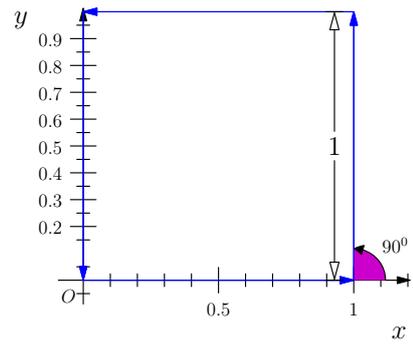
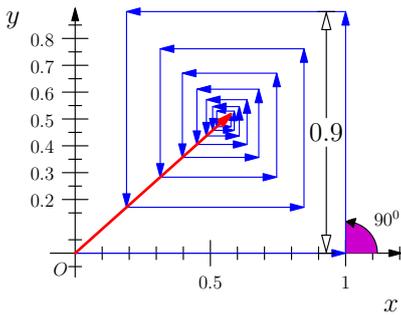


Com'era da aspettarsi, la convergenza per $r = 0.95$ è molto più lenta. Adesso mettiamo a confronto z vicinissimo al cerchio unitario e z sul cerchio per $\theta = 60^\circ$:

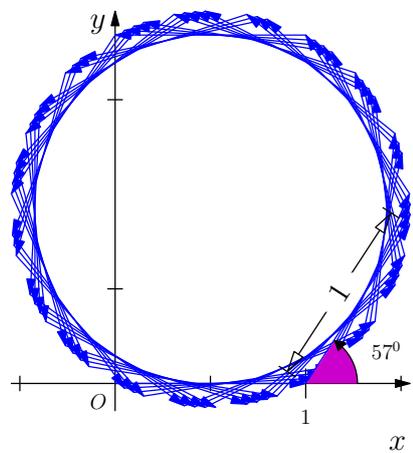
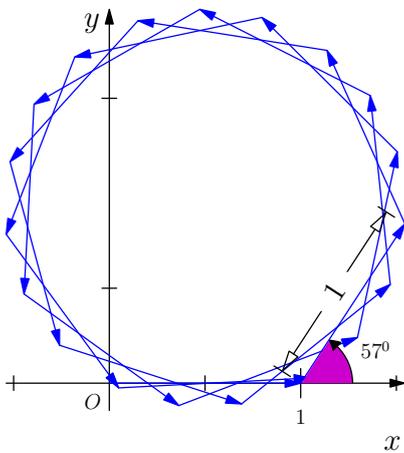


Nel primo caso ($r = 0.98$, a sinistra) la convergenza è lentissima: $m = 100$, ma la serie non si è ancora stabilizzata (potete indovinare dove finirà?). La figura a destra mostra che per $z = 1$ non ci potrà mai essere convergenza: l'"orbita" della serie è periodica e l'esagono regolare è percorso indefinitamente all'aumentare di m , senza che mai ci sia stabilizzazione della somma. Ecco un altro esempio dello stesso

tipo, per $\theta = 90^\circ$:

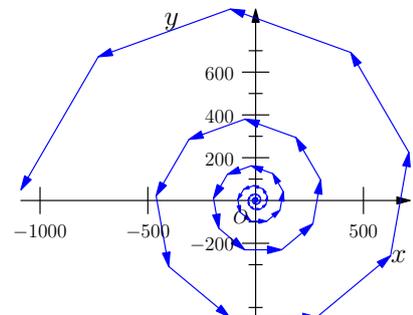
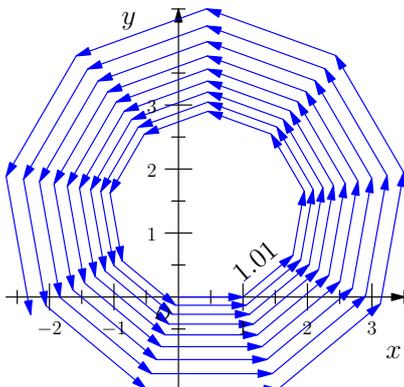


Il fatto che quando z è sul cerchio, compaia un poligono regolare non è generico: è solo dovuto al fatto che 60 e 90 sono divisori interi di 360. Per una diversa scelta dell'angolo, l'orbita cessa d'essere periodica. Ecco i risultati per $\theta = 57^\circ$: nella figura a sinistra, $m = 20$, in quella a destra, $m = 80$:



La figura a destra mostra che al crescere di m l'orbita copre uniformemente un anello circolare (si potrebbe dimostrare che lo copre densamente, ma questo esula dai nostri scopi). Quindi non ci può essere convergenza.

Infine, appena z esce dal disco, la serie tende all'infinito. Ecco due casi: per $r = 1.01$ e $r = 1.1$ ($\theta = 40^\circ$ in entrambi i casi):



2.10.2 Regolarizzazione di Abel

Abel inventò anche un metodo per regolarizzare serie divergenti sul cerchio \mathbb{T} . Introdusse quella che oggi è nota come sommabilità o regolarizzazione di Abel,

$$A\text{-}\sum_{n=-0}^{\infty} c_n e^{in\theta} \equiv \lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}$$

In altre parole, il valore di Abel della serie sul cerchio unitario nel punto θ è quello ottenuto come limite $r \rightarrow 1$, lungo la direzione θ , della serie dentro al disco. La sommabilità secondo Abel è molto liberale e rende finite somme che sarebbero altrimenti infinite come limite delle somme parziali. Ad esempio, per la serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ si ha

$$A\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{2}$$

Valgono i seguenti teoremi:

- Se una serie è sommabile nel senso usuale, allora è sommabile secondo Abel.
- Se una serie è sommabile secondo Abel, allora è sommabile secondo Cesaro (ma non necessariamente viceversa).

Il metodo di Abel si applica non solo alle serie, ma anche agli integrali divergenti. La regolarizzazione di Abel per gli integrali è

$$A\text{-}\int f(x) dx \equiv \lim_{\lambda \downarrow 0} \int e^{\lambda x} f(x) dx$$

In fisica, il metodo di Abel per regolarizzare serie e integrali è più usato di quello di Cesaro — forse perché la sommabilità secondo Abel è ancora più liberale di quella secondo Cesaro.