

4.8 COMPLEMENTI

4.8.1 La serie del logaritmo

Vogliamo ricavare la serie per la parte principale del logaritmo. Preliminarmente, osserviamo che usando il binomio di Newton (la serie binomiale per n intero è un polinomio di grado n), mediante una diversa definizione di esponenziale, si arriva alla stessa funzione esponenziale: si definisca

$$e^z \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n,$$

ma

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n &= 1 + n \left[\frac{z}{n}\right] + \frac{n(n-1)}{2!} \left[\frac{z}{n}\right]^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left[\frac{z}{n}\right]^3 + \dots \\ &= 1 + z + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2!} z^2 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!} z^3 + \dots, \end{aligned}$$

per cui, passando al limite $n \rightarrow \infty$ si ritrova la funzione esponenziale definita dalla serie

$$e^z \equiv 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

Adesso, sia

$$L(z) \equiv (\text{Log})(1+z),$$

allora, essendo il logaritmo definito come funzione inversa dell'esponenziale,

$$\left(1 + \frac{L}{n}\right)^n = e^L = (1+z) \Rightarrow 1 + \frac{L}{n} \approx (1+z)^{\frac{1}{n}}$$

Ci sono n rami di $(1+z)^{\frac{1}{n}}$ nel disco unitario, ma poichè $L(0) = 0$, ci serve il ramo di $(1+z)^{\frac{1}{n}}$ che vale 1 quando $z = 0$. Usando la serie binomiale,

$$1 + \frac{L}{n} \approx 1 + \frac{1}{n}z + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2!} z^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{3!} z^3 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)}{4!} z^4 \dots,$$

da cui

$$L = z + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2} z^2 + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{2n}-1\right)}{3} z^3 + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{2n}-1\right)\left(\frac{1}{3n}-1\right)}{4} z^4 + \dots$$

Infine, passando al limite di n che tende all'infinito,

$$(\text{Log})(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} + \dots$$

4.8.2 Serie di potenze e serie di Fourier

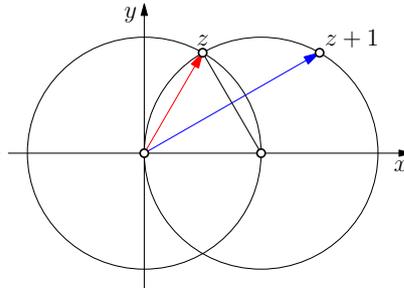
Vogliamo mostrare che, solo sulla base di quanto è stato fatto finora, senza neanche aver incominciato lo studio delle serie di Fourier, siamo in grado di mostrare (rigorosamente!) come alcune funzioni possano essere analizzate (e sintetizzate) mediante serie di Fourier. Propedeutica alla discussione seguente è la sezione. 2.8.

Consideriamo la serie della parte principale del logaritmo appena ricavata, cioè la serie per $L(z) = (\text{Log})(1+z)$. Per quanto visto nella sezione. 2.8 tale serie è convergente per $z = e^{i\theta}$, $\theta \neq -\pi$. Ora,

$$\text{Log}(1+z) = \ln|1+z| + i\text{Arg}(1+z)$$

dove $\Theta = \text{Arg}(1+z)$ è la parte principale dell'angolo di $1+z$, dove, per definizione, $\theta = \text{Arg}(z)$, varia nell'intervallo $-\pi < \theta \leq \pi$.

Ragionando sulla figura



si vede che l'angolo di $z+1$ è la metà dell'angolo di z ,

$$\Theta(\theta) = \frac{1}{2}\theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi,$$

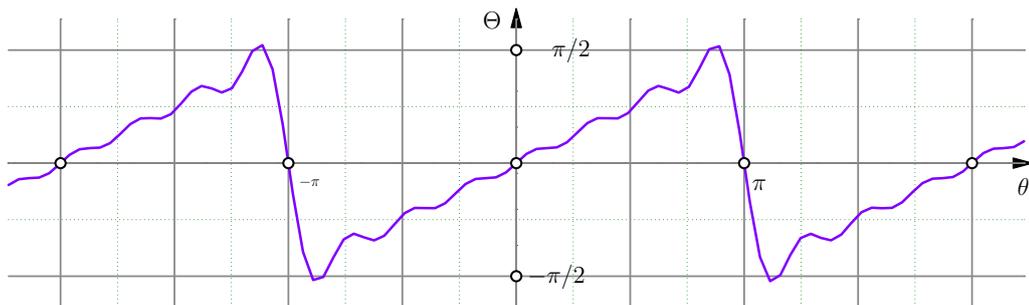
da cui

$$\text{Im Log}(1+z) = \frac{1}{2}\theta,$$

Quindi, per confronto con lo sviluppo in serie di $\text{Log}(1+z)$ per $z = e^{i\theta}$, si ottiene lo sviluppo di Fourier

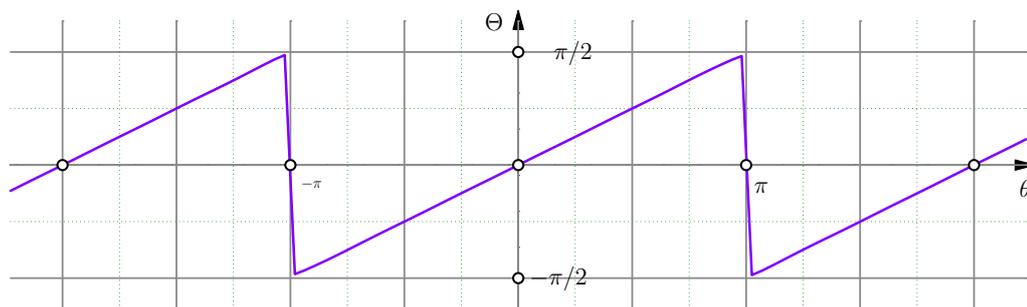
$$\Theta(\theta) = \frac{1}{2}\theta = \sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} - \frac{\sin 4\theta}{4} + \frac{\sin 5\theta}{5} + \dots$$

Adesso, usando un semplice programmino, si può fare un grafico delle somme parziali della serie di Fourier. Sommando i primi 8 termini, si ottiene



Aumentando il numero dei termini, si può vedere l'effetto magico della convergenza di una somma di onde sinusoidali completamente lisce all'onda discontinua a dente di sega. A Fourier era completamente chiara la potenza di calcolo offerta dal suo metodo. Tuttavia, i primi sommatori efficienti furono costruiti nella seconda metà dell'800. Uno dei primi sommatori meccanici di serie di Fourier fu costruito dal Michelson (il fisico che eseguì con Morley gli esperimenti per rivelare il movimento della terra rispetto all'etere).

Il dispositivo di Michelson sommava circa 100 termini. Oggi, con un piccolo portatile, e in una frazione di secondo, se ne possono sommare molti di più. Nel nostro caso, sommandone 500, si ottiene



Si osservi che nei punti di discontinuità le somme parziali tendono a fare la media dei limiti destro e sinistro (questo è un fatto che riceverà la dovuta attenzione a tempo debito).

Due commenti. Primo: non è necessario usare una serie di potenze sul cerchio di convergenza per ottenere una serie di Fourier. Si consideri, per esempio, la serie geometrica

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1 - z}$$

e si ponga $z = \frac{1}{2}e^{i\theta}$. Sostituendo questo valore e prendendo la parte immaginaria di ambo i membri dell'equazione, si ottiene la serie di Fourier

$$\frac{2 \sin \theta}{5 - 4 \cos \theta} = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2^2} \sin 2\theta + \frac{1}{2^3} \sin 3\theta + \dots$$

Secondo: data una funzione $f(\theta)$, la regola di calcolo esplicita per determinare i coefficienti della sua serie di Fourier è data nel testo del problema 2.4. Ma che ci sia una regola non vuol dire che sia sempre facile da usare (il calcolo degli integrali potrebbe essere complicato). È dunque importante (non solo concettualmente, ma anche ai fini del calcolo) non sottovalutare il metodo sopra descritto (che funziona quando si riesce a riportare $f(\theta)$ alle parti reale o immaginaria di una serie di potenze di cui si conosce la somma).