

5.9 COMPLEMENTI

5.9.1 Il gruppo delle trasformazioni di Möbius

La trasformazione

$$z \mapsto w = M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

è iniettiva e surgettiva: dato w , esiste (uno e uno solo) z che è trasformato in w . Questo si mostra esplicitamente calcolando la trasformazione inversa:

$$M^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

M è detta normalizzata se $ad - bc = 1$. Si osservi che se M è normalizzata, anche M^{-1} lo è.

Si consideri $M = M_2 \circ M_1$, dove

$$M_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}, \quad \text{e} \quad M_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$$

Si verifica facilmente che anche M è una trasformazione di Möbius, cioè della forma

$$M(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}$$

(non è algebricamente ovvio che se M_1 e M_2 sono non-singolari anche M è non singolare, cioè $AD - BC \neq 0$. Tra poco vedremo un approccio algebrico che rende questo ovvio.)

Morale: *Le trasformazioni di Möbius non singolari formano un gruppo.* Questo perché:

1. La trasformazione identica $E(z) = z$ appartiene all'insieme.
2. La composizione di due elementi dell'insieme fornisce un elemento dell'insieme.
3. Ogni membro dell'insieme ha un inverso che è anch'esso nell'insieme.

□

Si osservi che i coefficienti a, b, c e d di una trasformazione di Möbius non sono unici. Se k è una costante non nulla, ka, kb, kc e kd definiscono la stessa trasformazione.

LE TRASFORMAZIONI DI MÖBIUS COME GRUPPO DI MATRICI. Consideriamo la corrispondenza

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \longleftrightarrow \quad [M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Si osservi che da destra a sinistra c'è unicità, ma non viceversa: $k[M]$ e $[M]$ corrispondono alla stessa trasformazione M . Se M è normalizzata, $ad - bc = 1$, allora $[M]$ è unica a meno di un segno: $[M]$ e $-[M]$ danno la stessa trasformazione di Möbius. Questo ha un profondo significato fisico su cui torneremo più avanti nel corso. Si hanno le corrispondenze seguenti:

$$(i) \quad [E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \quad [M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$(iii) [M^{-1}] = [M]^{-1}$$

$$(iv) [M_2 \circ M_1] = [M_2][M_1]$$

La (ii) mostra che $[M]$ ha inverso sse $\det([M]) = ad - bc$ è non nullo. Dalla (iii) segue immediatamente che se $[M_2]$ e $[M_1]$ sono non singolari (determinante non nullo), allora anche $[M_2 \circ M_1]$ è non singolare (perché $\det(AB) = \det(A)\det(B)$).

Questo gruppo di matrici è di solito chiamato $GL(2, \mathbb{C})$. Le trasformazioni di Möbius normalizzate formano un sottogruppo (perché?) e il gruppo di matrici corrispondente è un sottogruppo di $GL(2, \mathbb{C})$, di solito chiamato $SL(2, \mathbb{C})$.