

7.11 COMPLEMENTI

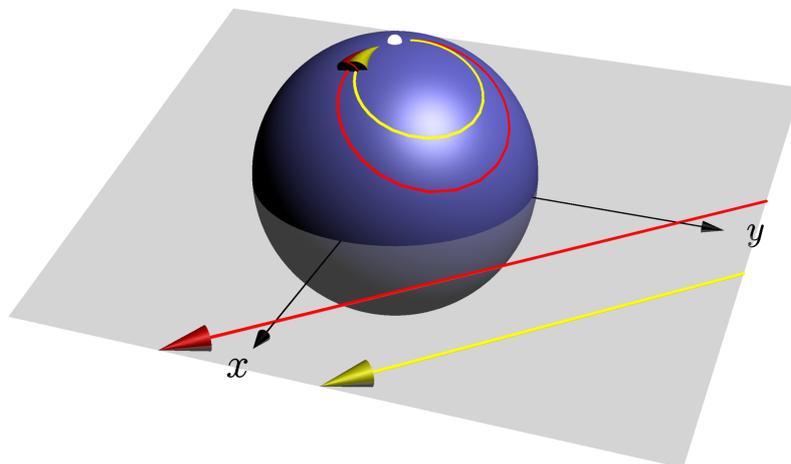
7.11.1 Campi all'infinito

Incominciamo con il campo più noioso che ci sia: il campo costante $\bar{f} = \bar{a}$ associato funzione complessa $f(z) = a$, dove a è un numero complesso. Se pensiamo ad un fluido e ci mettiamo nell'origine, è come se avessimo un fiume di larghezza infinita con un flusso d'acqua costante che arriva dall'orizzonte nella direzione $-\bar{a}$ per poi andare verso l'orizzonte nella direzione $+\bar{a}$, come se all'infinito ci fosse sia una sorgente sia un pozzo. Similmente, se pensiamo in termini di campo elettrico, è come se avessimo un campo generato all'infinito da una carica le cui linee di forza diventano parallele al finito per poi finire in una carica di segno opposto, anch'essa all'infinito.

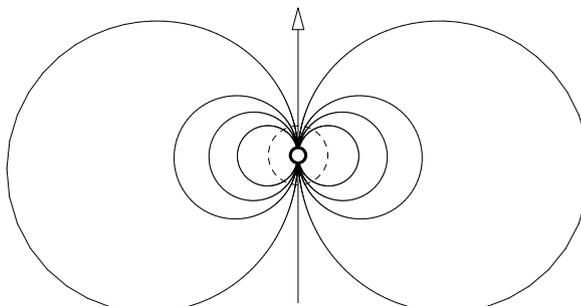
Per capire l'andamento all'infinito del campo costante, proiettiamo stereograficamente le linee di flusso del campo sulla sfera di Riemann. Invertendo la (4.5) si ottiene

$$X + iY = \frac{2x + i2y}{1 + x^2 + y^2} \quad Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \quad (7.10)$$

Applicando questa trasformazione a due linee di flusso, si ottengono due cerchi passanti per il polo nord della sfera di Riemann (cioè per il punto all'infinito):



(la figura è stata ottenuta con un programmino numerico, ma ci si può convincere di questo studiando come la (7.10) trasforma rette nel piano). Le due rette in figura sono nel I quadrante; passando al quarto, le rette si trasformeranno in cerchi che sono immagine speculare dei primi. In breve, l'andamento del campo all'infinito è quello di un dipolo!



Questo fatto è totalmente nascosto nella funzione stessa (dopo tutto, una costante, diciamo $7+i5$, ha lo stesso valore ovunque, incluso l'infinito!), ma è manifesto nella formula (7.9) che fornisce la funzione

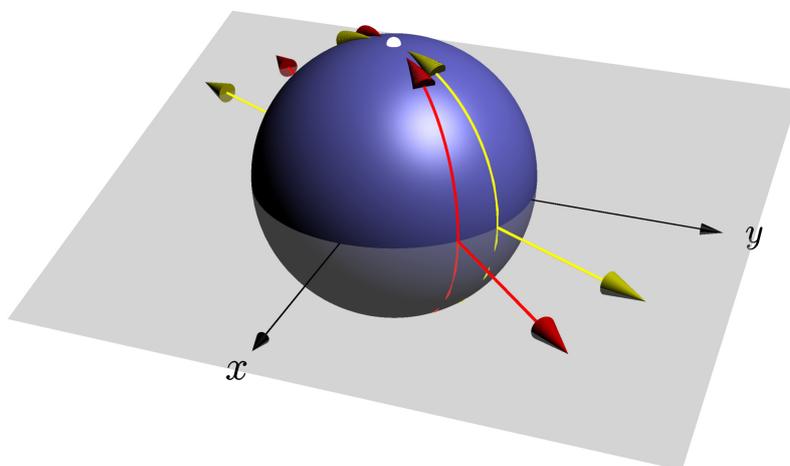
$$g(w) = \frac{-1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right)$$

da utilizzare per descrivere, in un intorno di $w = 0$, i flussi e le circuitazioni nell'intorno di $z = \infty$. Per una f costante e uguale a a , si ha

$$g(w) = \frac{-a}{w^2},$$

e nei complementi 6.8.1 abbiamo visto che il campo associato a questa funzione è proprio quello di un dipolo.

Se adesso consideriamo il campo coulombiano associato alla funzione q/z , cioè il campo di una carica q posta nell'origine e lo proiettiamo stereograficamente sulla sfera, vediamo che linee di forza radiali che emanano dall'origine diventano meridiani che convergono al polo nord, come nella figura sotto.



Nuovamente, questo è ciò che segue dalla (7.9), poiché in questo caso si ha

$$g(w) = \frac{-1}{w^2} qw = \frac{-q}{w}.$$

Quindi un campo coulombiano all'infinito è ancora coulombiano, ma con una carica di segno opposto. Questo cambiamento di segno è ciò che garantisce la conservazione del flusso: per una sorgente nell'origine ci deve essere un pozzo all'infinito, che è proprio ciò che mostra la figura sopra.