

9.7 COMPLEMENTI

9.7.1 Espansione in multipoli

Una delle formule più semplici e utili della fisica-matematica fu trovata nel 1782 da Adrien-Marie Legendre e quindi estesa pochi mesi dopo da Pierre-Simon de Laplace. I due fisici-matematici erano interessati a calcolare il potenziale gravitazionale associato ad una distribuzione di masse μ_i poste nei punti \mathbf{r}'_i .

Considerarono il potenziale gravitazionale di questa distribuzione (ignoriamo il segno e la costante di gravitazione)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{\mu_i}{R_i} = \sum_i \frac{\mu_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|}$$

e per ciascun singolo termine della somma, Legendre ottenne (per $r > r'$) lo sviluppo in serie

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \alpha}} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{r'}{r} \cos \alpha}} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell}} P_{\ell}(\cos \alpha)$$

dove $P_0 = 1$, $P_1(u) = u$, $P_2(u) = (1/2)(3u^2 - 1)$, ... sono i *Polinomi di Legendre*. Sulla base della loro definizione, si ottengono calcolando lo sviluppo in serie di Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1 + z^2 - 2zu}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} z^{\ell} P_{\ell}(u)$$

(per questa ragione, la funzione a primo membro è detta *funzione generatrice* dei polinomi di Legendre). Si osservi che per $r < r'$, sarebbe stato conveniente raccogliere r' a denominatore e ottenere in questo modo una serie di potenze positive in r (si confronti con il trattamento della serie di Laurent).

Laplace, sempre nel 1782, fece un passo in più: usando coordinate sferiche, si rese conto che esistevano funzioni, $Y_{\ell}^m = Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$, $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, 0, \dots, \ell$, con "buone" proprietà rispetto alle rotazioni, in termini delle quali era possibile sviluppare le funzioni di Legendre:

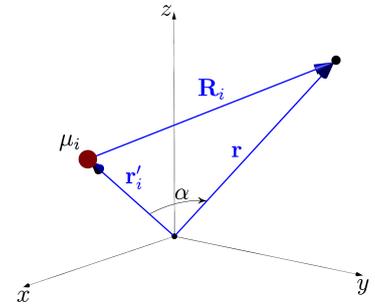
$$P_{\ell}(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (-1)^m Y_{\ell}^{-m}(\theta, \phi) Y_{\ell}^m(\theta', \phi')$$

dove (θ, ϕ) e (θ', ϕ') sono le coordinate angolari rispettivamente di \mathbf{r} e \mathbf{r}' . Le funzioni Y_{ℓ}^m sono dette *funzioni armoniche sferiche* normalizzate. A questo punto, Laplace espresse il potenziale gravitazionale $\varphi(\mathbf{r})$ come

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{\mu_i}{R_i} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} p_{\ell m} \frac{Y_{\ell}^{-m}}{r^{\ell+1}}$$

dove

$$p_{\ell m} = \sum_i (-1)^m \mu_i Y_{\ell}^m(\theta'_i, \phi'_i) r'^{\ell}$$



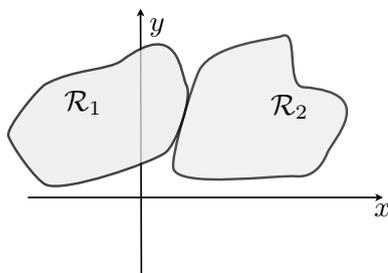
Adrien-Marie Legendre (1752–1833) è stato un matematico francese. Tra i suoi contributi, lo studio delle funzioni e degli integrali ellittici e lo sviluppo della regressione lineare basata sul metodo dei minimi quadrati. È noto per la trasformazione di Legendre, originariamente scoperta come trasformazione geometrica, che in seguito fu usata per passare dalla formulazione lagrangiana a quella hamiltoniana della meccanica e per ottenere l'entalpia e le energie libere di Helmholtz e Gibbs a partire dall'energia interna.

sono chiamati *momenti di multipolo* e l'espansione di $\varphi(\mathbf{r})$ è chiamata *espansione in multipoli*. Naturalmente, la funzione così ottenuta, è *armonica* nello spazio al di fuori della regione occupata dalle masse, dove vale $\Delta\varphi = 0$.

Correva l'anno 1782 e già era chiaro che le soluzioni dell'equazione di Laplace si raggruppavano in multipli: fissato ℓ , l'insieme delle combinazioni lineari delle $2\ell + 1$ armoniche sferiche si trasforma in se stesso per rotazioni. Nel linguaggio moderno, le armoniche sferiche di ordine ℓ sono una base per la rappresentazione irriducibile del gruppo delle rotazioni di dimensione ℓ . Questa matematica la si ritrova in elettrostatica e in meccanica quantistica.

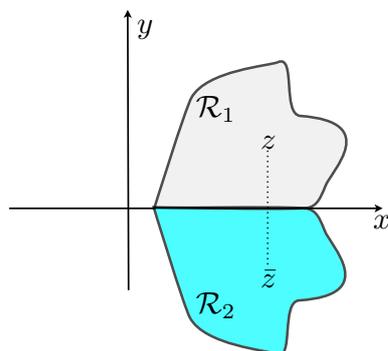
9.7.2 Nota sul sul prolungamento analitico

La nozione di prolungamento analitico vale anche per regioni che non sono delimitate da cerchi. Sia $f_1(z)$ una funzione che è analitica in una regione \mathcal{R}_1 e supponiamo di trovare una funzione $f_2(z)$ che è analitica in una regione \mathcal{R}_2 e che è tale che $f_1(z) = f_2(z)$ in $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$. Allora $f_2(z)$ è una continuazione analitica di $f_1(z)$. Perché ci sia continuazione analitica è sufficiente che le due regioni abbiano in comune soltanto un piccolo arco.



Mediante continuazione analitica a regioni $\mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4, \dots$, possiamo estendere la regione iniziale ad altre parti del piano complesso. Le funzioni $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots$ sono ancora chiamate *elementi* della funzione. Il *teorema di unicità* stabilisce che la continuazione analitica è unica, a meno che nel processo di estensione non si incontrino punti di diramazione. L'unicità del prolungamento analitico è garantita dall'unicità della serie di Taylor. Un importante strumento di estensione analitica è il *principio di Schwartz*. Questo teorema stabilisce che se una funzione $F_1(z)$ è analitica in una regione \mathcal{R}_1 del semipiano superiore Π^+ , avente come bordo l'asse reale, e ha un valore reale sull'asse reale, allora può essere estesa alla regione \mathcal{R}_2 , ottenuta da \mathcal{R}_1 per riflessione sull'asse reale, nel seguente modo:

$$F_2(z) = \overline{F_1(\bar{z})}$$



9.7.3 La funzione gamma

Per $\operatorname{Re} z > 0$, la funzione gamma è definita da

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (9.12)$$

Vale la formula di ricorrenza

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{dove} \quad \Gamma(1) = 1. \quad (9.13)$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt \\ &= [t^z (-e^{-t})]_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} (zt^{z-1})(-e^{-t}) dt \\ &= z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z). \end{aligned}$$

Se z è un intero, dalla formula di ricorrenza (9.13) si ha

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2) \cdots 1 = n!$$

per cui la gamma è una generalizzazione del fattoriale.

Per $\operatorname{Re} z < 0$, la definizione (9.12) perde di significato, perché l'integrale diverge. La funzione gamma nel semipiano sinistro risulta però univocamente definita per prolungamento analitico. Per mostrare questo, dimostriamo preliminarmente la formula

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} \quad (9.14)$$

per ogni intero n . Dalla (9.13), si ha

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z), \\ \Gamma(z+2) &= (z+1)\Gamma(z+1) = (z+1)z\Gamma(z) \\ \Gamma(z+3) &= (z+2)\Gamma(z+2) = (z+2)(z+1)z\Gamma(z) \end{aligned}$$

e, in generale

$$\Gamma(z+n+1) = (z+n) \cdots (z+2)(z+1)z\Gamma(z)$$

che è proprio la formula che si voleva dimostrare. Dalla (9.14), e dalla (9.12), la funzione gamma risulta così definita per $\operatorname{Re} z \geq n$, salvo che nei poli semplici $z = 0, -1, -2, \dots, -n$. Dato che la (9.14) vale per qualunque intero n , la gamma risulta ovunque definita nel piano complesso eccetto che nell'origine e in tutti gli interi negativi, che sono poli semplici della funzione.

9.7.4 La funzione zeta di Riemann

La funzione zeta di Riemann $\zeta(z)$ è definita, per $\operatorname{Re} z > 1$ dalla serie

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

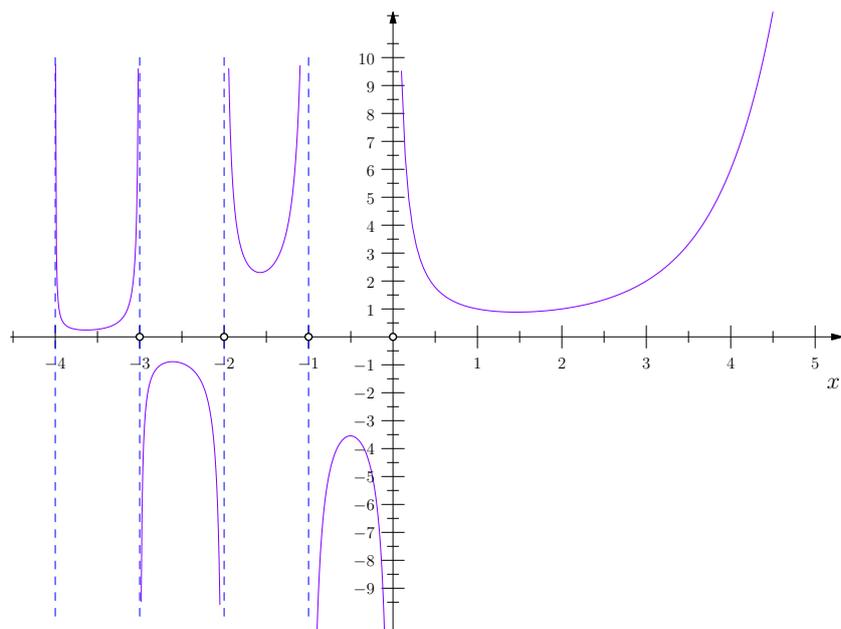


Figura 9.12: Grafico della funzione gamma sull'asse reale.

Questa serie era già stata considerata da Eulero nel 1740 per z intero positivo e successivamente estesa da Chebyshev a z reale e maggiore di uno.

Si osservi che la sostituzione $u = t/n$ nell'integrale che definisce la funzione gamma (9.12) fornisce

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} (un)^{z-1} e^{-un} n du = n^z \int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-nu} du,$$

da cui

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-nt} dt$$

per $\text{Re } z > 1$. Ora,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{e^t - 1} \quad (9.15)$$

se $t > 0$. Se $z = x + iy$, allora

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |t^{z-1} e^{-nt}| dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt. \quad (9.16)$$

Per grandi t , $1/e^t - 1 \sim e^{-t}$ e per piccoli t , $1/e^t - 1 \sim 1/t$. Ne segue che per $x > 1$ l'integrale nella (9.16) converge. Allora (per il teorema di Fubini) nella (9.15) si può scambiare la serie con l'integrale. Perciò

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \quad (9.17)$$

Questa equazione fu il primo risultato ottenuto da Riemann in suo famoso lavoro del 1859. Il secondo fu di mostrare che, rappresentando l'integrale a secondo membro della come integrale di contorno nel piano complesso t si otteneva l'equazione

$$\zeta(z) = \frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i} I(z) \quad (9.18)$$

dove $I(z)$ è analitica ovunque, con zeri per $2, 3, 4, \dots$. Questi zeri di $I(z)$ cancellano i poli di $\Gamma(1-z)$, che sono $1, 2, 3, 4, \dots$, eccetto il polo $z = 1$. Poiché il secondo membro della (9.18) è definito ovunque nel piano complesso eccetto in $z = 1$, la (9.18) definisce il prolungamento analitico della ζ a tutto il piano complesso. Se ne conclude che la zeta di Riemann è una funzione meromorfa in \mathbb{C} con un polo in $z = 1$. Dall'espressione esplicita di $I(z)$, che qui non diamo, risulta che $z = 1$ è un polo semplice con residuo pari a 1. Sempre nello stesso lavoro del 1859, Riemann deduce la seguente equazione funzionale per la ζ :

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z) \zeta(1-z). \quad (9.19)$$

ZERI DELLA ζ . Il lavoro di Riemann del 1859 incomincia con un riferimento al seguente risultato di Eulero:

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}} \quad (9.20)$$

se $\operatorname{Re} z > 1$, dove p_1, p_2, p_3, \dots è la successione dei numeri primi. Per dimostrare questo risultato, si usa la serie geometrica per esprimere $1/(1 - p_n^{-z})$:

$$\frac{1}{1 - p_n^{-z}} = \sum_{m=1}^{\infty} p_n^{-mz}$$

e quindi

$$\prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - p_n^{-z}} = \sum_{j=1}^{\infty} n_{N,j}^{-z},$$

dove $n_{N,1}, n_{N,2}, n_{N,3}, \dots$ sono tutti gli interi che possono essere fattorizzati come prodotti di potenze dei numeri primi p_1, p_2, \dots, p_N . Facendo tendere N all'infinito, si ottiene l'equazione (9.20).

Poiché il prodotto (9.19) contiene fattori che non possono annullarsi, $\zeta(z) \neq 0$ per $\operatorname{Re} z > 1$. Supponiamo adesso che $\zeta(z) = 0$ e $\operatorname{Re} z < 0$. Poiché $\zeta(1-z) \neq 0$, l'equazione funzionale (9.19) implica

$$\Gamma(1-z) \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 0.$$

Poiché Γ non ha radici, abbiamo $z = 2k$, per interi $k < 0$, come radici. I pari negativi sono detti zeri banali della ζ . La striscia $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ è chiamata la *striscia critica*. Tutti gli zeri non banali della ζ devono stare nella striscia critica.

Supponiamo adesso che z sia nella striscia critica e che $\zeta(z) = 0$. Poiché $\sin(\pi z/2) \neq 0$, vediamo che $\zeta(1-z) = 0$. Vale a dire, le radici non banali, o *radici critiche*, sono simmetriche rispetto alla retta critica $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$. Si osservi inoltre che, essendo $\zeta(z)$ reale per z reale, le radici della ζ sono simmetriche rispetto all'asse reale.

Per il suo studio sulla distribuzione dei numeri primi, Riemann ha bisogno di stimare il numero di radici della funzione ζ in una scatola nella striscia critica simmetrica rispetto alla retta critica. Ottiene una tale stima (dimostrata poi rigorosamente nel 1905 da Van Mangoldt) e quindi osserva che il numero di zeri sulla retta critica è circa lo stesso (*nessuno ha mai dimostrato questo!*). Quindi, continua dicendo che è "molto probabile" che tutte le radici nella striscia critica stiano sulla retta critica. Questa affermazione è nota come *ipotesi di Riemann*. Riemann continua dicendo:

Naturalmente, sarebbe desiderabile avere una dimostrazione rigorosa di questo, ma ho deciso di lasciare da parte la ricerca di una tale dimostrazione, dopo qualche vano e fugace tentativo, perché non è necessario per l'oggetto immediato della mia investigazione.

Oggi, 152 anni dopo, dopo innumerevoli sforzi di molti matematici, non abbiamo ancora ragioni per ritenere o non ritenere che l'ipotesi di Riemann sia vera. L'ipotesi di Riemann resta uno dei problemi aperti della matematica più affascinanti e suggestivi.

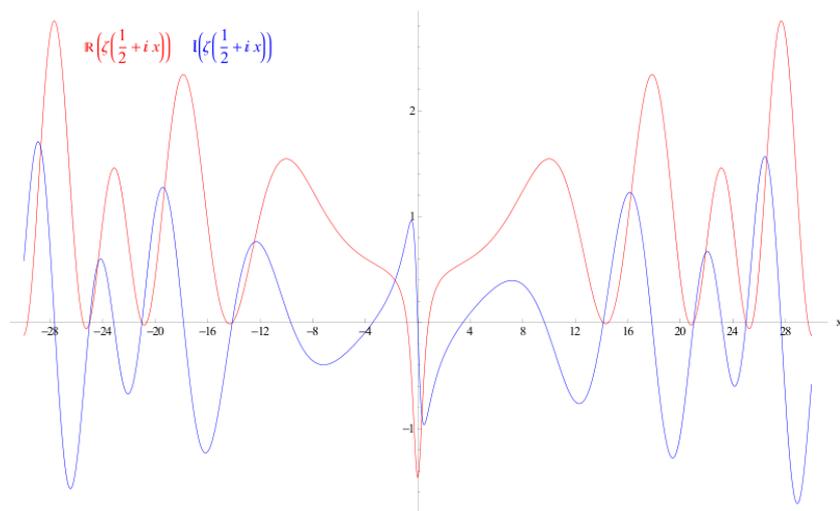


Figura 9.13: Parte reale (in rosso) e parte immaginaria (in blu) della funzione di Riemann lungo la retta critica $\text{Re } z = \frac{1}{2}$. I primi zeri non banali si hanno per $\text{Im } z = \pm 14.135, \pm 21.022$ e ± 25.011 .

La funzione ζ di Riemann compare in teoria dei numeri, in statistica, come un possibile modo di regolarizzare serie divergenti in teoria quantistica dei campi, nell'analisi dell'effetto Casimir (forza attrattiva tra le armature di un condensatore in assenza di campi dovuta alle fluttuazioni di vuoto del campo elettromagnetico quantizzato), nella teoria dei sistemi dinamici e nello studio del comportamento caotico di sistemi nel regime semi-classico.

9.7.5 Il teorema di Liouville della meccanica hamiltoniana

Un sistema dinamico è un sistema (fisico, biologico, economico, etc), il cui stato \mathbf{x} evolve nel tempo secondo il sistema di equazioni differenziali del prim'ordine

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (9.21)$$

Assumiamo che $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ è un campo vettoriale su \mathbb{R}^n , detto campo di velocità. \mathbb{R}^n è detto lo spazio delle fasi del sistema.

La condizione che \mathbf{v} non dipenda dal tempo non è restrittiva: se dipendesse dal tempo basterebbe aggiungere la variabile $x_{n+1} = t$ e passare al sistema in \mathbb{R}^{n+1} con equazione aggiuntiva $\dot{x}_{n+1} = 1$. La meccanica hamiltoniana fornisce una classe di sistemi dinamici: quelli per cui $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ e il campo di velocità è ottenuto per derivazione da una funzione $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, detta hamiltoniana,

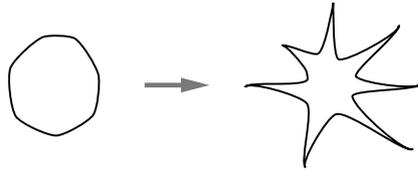
$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right)$$

(quindi lo spazio delle fasi ha dimensione pari se l'hamiltoniana non dipende dal tempo).

Per un sistema dinamico generico del tipo (9.21), assumendo abbastanza regolarità sul campo \mathbf{v} (condizione purtroppo non verificata nei casi di principale interesse fisico, come la meccanica celeste), la soluzione esiste ed è unica. La soluzione è da intendere come una famiglia ad un parametro di funzioni $\mathbf{f}_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, detta *flusso*, che trasforma gli stati \mathbf{x} del sistema ad un tempo arbitrario negli stati \mathbf{y} dopo un tempo t ,

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}_t(\mathbf{x})$$

Il flusso trasforma dunque una qualunque regione \mathcal{R} dello spazio delle fasi in un'altra regione



Per studiare come varia il volume della regione si procede come segue. Come sempre, data una trasformazione, è utile conoscere le sue proprietà locali. Per t infinitesimo, diciamo δt , si ottiene

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}_{\delta t}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x})\delta t$$

Le proprietà locali sono espresse dalla matrice Jacobiana

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \delta t$$

dove \mathbf{I} è la matrice identica e $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{x}$ è la matrice con elementi $\partial v_i / \partial x_j$. La variazione del volume è data dal determinante jacobiano

$$\mathcal{J} = \det \mathbf{J} = \det \left(\mathbf{I} + \delta t \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)$$

Ricordando l'importante formula

$$\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$$

e osservando che, essendo δt infinitesimo,

$$\mathbf{I} + \delta t \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = e^{\delta t \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}}$$

si ottiene

$$\mathcal{J} = e^{\delta t \nabla \bullet \mathbf{v}}$$

in quanto la traccia della matrice Jacobiana è la somma degli elementi diagonali $\partial v_i / \partial x_i$, che è proprio la divergenza del campo \mathbf{v} . Abbiamo posto uguale a 1 lo jacobiano al tempo t perché abbiamo calcolato la variazione tra il tempo t e il tempo $t + \delta t$ assumendo che al tempo t la trasformazione fosse l'identità. Fossimo partiti da un tempo anteriore a t , e posto uguale a 1 lo jacobiano a quel tempo, avremmo trovato

$$\mathcal{J}(t + \delta t) = \mathcal{J}(t) e^{\delta t \nabla \bullet \mathbf{v}}$$

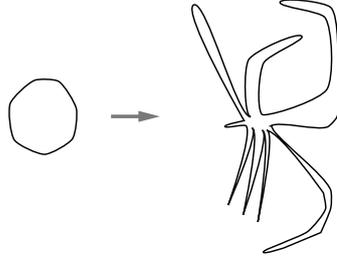
Poiché δt è infinitesimo,

$$\mathcal{J}(t + \delta t) = \mathcal{J}(t) + \delta t \nabla \bullet \mathbf{v} \mathcal{J}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mathcal{J}(t)} \frac{\mathcal{J}(t + \delta t) - \mathcal{J}(t)}{\delta t} = \nabla \bullet \mathbf{v}$$

da cui

$$\frac{1}{\mathcal{J}} \frac{d\mathcal{J}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Dunque, il tasso di variazione percentuale di volume nell'intorno di un punto dello spazio del fasi è dato dalla divergenza del campo di velocità in quel punto: questo è il **teorema di Liouville!** Nei sistemi dissipativi (per esempio, nel famoso sistema di Lorenz che diede il via alla ripresa degli studi sul caos nella seconda metà del Novecento) la divergenza è tipicamente negativa. Se la divergenza è zero, la dinamica può deformare le regioni dello spazio delle fasi in modo orrendo



ma non può cambiarne il volume. Questo è il caso dei sistemi hamiltoniani, per i quali

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) = 0$$