

11.10 COMPLEMENTI

11.10.1 Analisi dimensionale e nucleo del calore

Vogliamo studiare la propagazione del calore in un filo (adiabaticamente isolato) di lunghezza infinita. Consideriamo l'equazione del calore

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial x^2},$$

Come abbiamo già sottolineato, questa equazione è ottenuta dall'equazione di continuità

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}$$

che esprime la conservazione locale della densità di energia $\propto \mathcal{T}(x, t)$. Questo significa che vale la legge di conservazione

$$\int |\mathcal{T}(x, t)| dx = \Theta \propto \text{Energia totale.}$$

Supponiamo di volere trovare una soluzione dell'equazione del calore con i metodi dell'analisi dimensionale: $[D] = L^2 T^{-1}$ è una costante del problema; $\Theta = L\theta$ (θ = temperatura), è proporzionale alla quantità iniziale di energia immessa nel sistema. Naturalmente, $[x] = L$ e $[t] = T$. La quantità

$$u = x/\sqrt{Dt}$$

è adimensionale. La soluzione che cerchiamo è una temperatura: $[\mathcal{T}] = \theta$. Cerchiamola come funzione di (t, D, Θ) . Deve quindi valere

$$[\mathcal{T}] = \theta = [t]^a [D]^b [\Theta]^c = T^a L^{2b} T^{-b} \theta^c L^c = L^{2b+c} T^{a-b} \theta^c$$

da cui

$$2b + c = 0 \quad a - b = 0 \quad c = 1$$

che ha soluzioni

$$a = -\frac{1}{2} \quad b = -\frac{1}{2} \quad c = 1$$

Quindi l'analisi dimensionale ci dice che la soluzione è della forma

$$\mathcal{T}(x, t) = \frac{\Theta}{\sqrt{Dt}} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)$$

dove $\Phi = \Phi(u)$ è una funzione da terminare. Il punto importante è che Φ è una funzione di *una* variabile adimensionata, la combinazione $u = x/\sqrt{Dt}$, e non di x e t separatamente. Ora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\Theta}{\sqrt{Dt}} \frac{1}{Dt} \Phi''(u) \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \frac{\Theta}{\sqrt{Dt}^{3/2}} [\Phi(u) + u\Phi'(u)] \end{aligned}$$

Per l'equazione del calore

$$\frac{\Theta}{\sqrt{Dt}} \frac{1}{Dt} \Phi'(u) = -D \frac{1}{2} \frac{\Theta}{\sqrt{Dt}^{3/2}} [\Phi(u) + u\Phi'(u)]$$

da cui

$$\Phi'' + \frac{u}{2}\Phi' + \frac{1}{2}\Phi = 0$$

Con il vincolo (conservazione dell'energia = norma L^1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u) du = 1$$

L'equazione sembrerebbe difficile da risolvere, ma non lo è. Riconosciamo a primo membro un differenziale esatto:

$$\frac{d}{du} \left[\Phi' + \frac{u}{2}\Phi \right] = 0$$

Quindi

$$\Phi' + \frac{u}{2}\Phi = \text{costante}$$

Tuttavia, ogni soluzione fisicamente ragionevole deve avere $\Phi \rightarrow 0$ e $\Phi' \rightarrow 0$ quando $u \rightarrow \infty$. Quindi la costante di integrazione deve essere zero. L'equazione diventa

$$\Phi' + \frac{u}{2}\Phi = 0$$

Abbiamo già incontrato questa equazione nella lezione 10.1 quando abbiamo calcolato la trasformata di Fourier di una gaussiana con il metodo della derivazione sotto il segno di integrale. La soluzione è dunque

$$C e^{-u^2/4}$$

Determiniamo C imponendo la normalizzazione $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u) du = 1$, da cui

$$C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/4} du = C\sqrt{4\pi} = 1$$

Quindi,

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-u^2/4}$$

Ritornando alle variabili originali,

$$\mathcal{T}(x, t) = \frac{\Theta}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}$$

11.10.2 Legge dei grandi numeri e limite centrale

Supponete di lanciare due dadi. La probabilità che la somma sia 7 è

$$p(7) = p(1)p(7-1) + p(2)p(7-2) + p(3)p(7-3) + p(4)p(7-4) + p(5)p(7-5) + p(6)p(7-6)$$

Questa regola è del tutto generale: la probabilità della somma di due variabili casuali indipendenti, con distribuzioni di probabilità $f(x)$ e $g(y)$ rispettivamente, è il prodotto di convoluzione delle due distribuzioni di probabilità

$$f \star g(x) = \int f(x)g(x-y)dy$$

Se sommate N variabili casuali indipendenti, tutte con la stessa distribuzione di probabilità, la distribuzione della somma è

$$\underbrace{p \star \dots \star p}_{N \text{ volte}}(x) = p^{\star N}(x)$$

D'ora in poi, per semplicità, assumeremo che p sia a media zero,

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = m = 0$$

Se moltiplicate per α una variabile casuale X con distribuzione $f(x)$, e formate la variabile casuale $Y = \alpha X$, la distribuzione di Y è $(1/\alpha)f(x/\alpha)$. Quindi, se dividete per N la somma di N variabili casuali indipendenti X_i , tutte con la stessa distribuzione $p(x)$, questa variabile casuale,

$$\frac{X_1 + \dots + X_N}{N},$$

detta *media empirica*, ha distribuzione

$$Np^{*N}(Nx).$$

Per determinare l'andamento asintotico per N grande della distribuzione della media empirica, prendiamone la trasformata di Fourier

$$N \frac{1}{N} \hat{p}(k/N)^N = \hat{p}(k/N)^N,$$

dove, assumendo la convenzione ②,

$$\hat{p}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{-ikx} dx$$

Non è difficile vedere che $\hat{p}(k/N)^N$ tende ad un valore costante e che quindi $p(x)$ tende a concentrarsi nello zero (abbiamo assunto che p fosse a media zero). Dimostriamo questo fatto, mostrando un risultato più specifico: che le fluttuazione statistiche attorno allo zero sono di ordine $1/\sqrt{N}$. Cioè, dimostriamo che la distribuzione di

$$Y_N = \frac{X_1 + \dots + X_N}{\sqrt{N}},$$

quando X_i sono variabili casuali indipendenti, converge ad una gaussiana a media zero e varianza uguale a quella delle X_i (assunte tutte distribuite nello stesso modo), a media $m = 0$ e varianza

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$$

La distribuzione di Y_N è

$$\sqrt{N}p^{*N}(\sqrt{N}x)$$

Passiamo alla sua trasformata di Fourier che è

$$g_N(k) = \hat{p}\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right)^N$$

Poiché siamo interessati al limite di N grande di $g_N(k)$, studiamo l'asintotica del suo logaritmo

$$\ln g_N(k) = N \ln \hat{p}\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right).$$

Adesso sviluppiamo in serie l'argomento del logaritmo:

$$\ln g_N(k) = N \ln \left[\hat{p}(0) + \hat{p}'(0) \frac{k}{\sqrt{N}} + \frac{1}{2} \hat{p}''(0) \frac{k^2}{N} + \dots \right].$$

Adesso osserviamo che

$$\begin{aligned}\widehat{p}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{-ikx} dx \Big|_{k=0} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (\text{perché è una distribuzione di probabilità}) \\ \widehat{p}'(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x)(-ix)e^{-ikx} dx \Big|_{k=0} = -i \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = -im = 0 \quad (\text{media zero per ipotesi}) \\ \widehat{p}''(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x)(-x^2)e^{-ikx} dx \Big|_{k=0} = - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = -\sigma^2 \quad (\text{varianza})\end{aligned}$$

Allora

$$\ln g_N(k) = N \ln \left[1 - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{k^2}{N} + \dots \right] \approx N \left[-\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{k^2}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \right].$$

Quindi, nel limite $N \rightarrow \infty$,

$$g_N(k) \rightarrow g_*(k) = e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 k^2}$$

che è proprio la trasformata di Fourier di

$$\mathcal{N}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}},$$

cioè la distribuzione normale (gaussiana) a media 0 e varianza σ^2 . Risulta così dimostrato il teorema del limite centrale.