

15.6 COMPLEMENTI

15.6.1 Complementi sulla trasformazione "swap" di Möbius

ESERCIZIO 15.1. *Mostrare che per effetto della (15.3) un punto Z sul cerchio \mathbb{T} di raggio 1 si trasforma nel punto Z^* , estremo delle corda che passa per Z e per a , secondo la costruzione geometrica mostrata in figura 15.2.*

Risolviamo l'esercizio con i metodi della geometria analitica. Dobbiamo trovare l'intersezione tra la retta che passa per i punti Z e a e il cerchio di raggio 1. L'equazione della retta è

$$(\bar{Z} - \bar{a})z - (Z - a)\bar{z} - (a\bar{Z} - \bar{a}Z) = 0$$

e naturalmente l'equazione del cerchio è $\bar{z}z = 1$. Moltiplichiamo l'equazione della retta per z , teniamo conto dell'equazione del cerchio, e riconduciamo l'equazione algebrica di secondo grado così ottenuta alla forma standard con coefficiente quadratico uguale a 1. Otteniamo

$$z^2 - \frac{a\bar{Z} - \bar{a}Z}{\bar{Z} - \bar{a}}z - (Z - a) = 0$$

Sappiamo che Z è soluzione, possiamo dunque abbassare di grado l'equazione ricordando che la somma delle radici è pari al coefficiente lineare cambiato di segno; chiamiamo Z^* la radice che cerchiamo. Allora

$$Z + Z^* = \frac{a\bar{Z} - \bar{a}Z}{\bar{Z} - \bar{a}},$$

da cui

$$Z^* = \frac{a\bar{Z} - \bar{a}Z}{\bar{Z} - \bar{a}} - Z = \frac{a\bar{Z} - \bar{a}Z - 1 + \bar{a}Z}{\bar{Z} - \bar{a}} = \frac{a\bar{Z} - 1}{\bar{Z} - \bar{a}} = \frac{(-Z)(a\bar{Z} - 1)}{(-Z)(\bar{Z} - \bar{a})} = \frac{Z - a}{\bar{a}Z - 1},$$

che è quanto si voleva dimostrare.

ESERCIZIO 15.2. *Calcolare lo Jacobiano della trasformazione sulla circonferenza \mathbb{T} di raggio 1.*

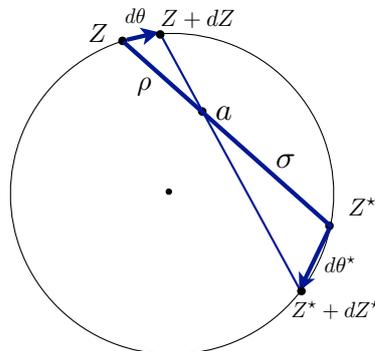
È richiesto il calcolo di

$$\frac{d\theta^*}{d\theta}$$

dove $dZ = iZd\theta$ e $dZ^* = iZ^*d\theta^*$. Quindi

$$\frac{d\theta^*}{d\theta} = \frac{Z}{Z^*} \frac{dZ^*}{dZ}$$

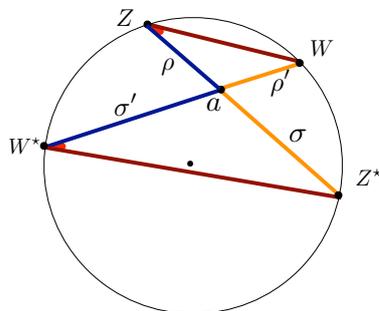
Si lascia come esercizio a casa il calcolo algebrico. Qui si fornisce un calcolo geometrico. Si consideri la figura sotto:



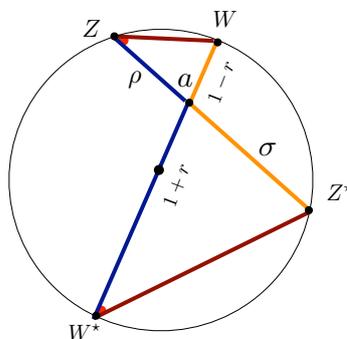
Lo Jacobiano è il rapporto tra le lunghezze d'arco infinitesime $d\theta^*$ e $d\theta$. Poiché i triangoli in figura (in blu) sono simili $d\theta^* : \sigma = d\theta : \rho$. Quindi

$$\frac{d\theta^*}{d\theta} = \frac{\sigma}{\rho}$$

Per determinare σ/ρ osserviamo che i triangoli finiti mostrati nella figura sotto sono simili.



Allora $\rho : \sigma' = \rho' : \sigma$. Ne segue che $\rho\sigma = \rho'\sigma' = \text{costante}$. Per determinare la costante, scegliamo W in modo che il segmento WW^* sia un diametro come in figura:



Posto $a = re^{i\alpha}$, si ottiene $\rho\sigma = (1+r)(1-r) = 1-r^2$. Quindi $\left| \frac{d\theta^*}{d\theta} \right| = \frac{\sigma}{\rho} = \frac{\sigma\rho}{\rho^2} = \frac{1-r^2}{\rho^2}$

Ma $\rho^2 = |Z-a|^2$, per cui il risultato finale è

$$\left| \frac{d\theta^*}{d\theta} \right| = \frac{1-r^2}{|Z-a|^2}$$

15.6.2 Dimostrazione del teorema di convergenza uniforme

TEOREMA Se f è una funzione continua su \mathbb{T} , la funzione

$$u(z) = u_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-\theta)f(\theta)d\theta, \quad z = re^{it} \in \mathbb{D}$$

converge uniformemente a f quando r tende a 1 ($f(s) \stackrel{\text{def}}{=} f(e^{is})$).

Dimostrazione. Incominciamo con lo stimare l'errore tra il limite e la funzione u :

$$E_r(t) = |f(t) - u_r(t)| = \left| f(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-\theta)f(\theta)d\theta \right|$$

Per cambiamento di variabili $t - \theta = s$, si ha

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) f(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) f(t - s) ds$$

Allora

$$E_r(t) = \left| f(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) f(t - s) ds \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) [f(t) - f(t - s)] ds \right|,$$

essendo $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) ds = 1$. Poiché il modulo dell'integrale è minore o uguale dell'integrale del modulo (e $P_r(s)$ è positiva), otteniamo

$$E_r(t) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) |f(t) - f(t - s)| ds.$$

I problemi nascono da $s = 0$, dove $P_r(s)$ diverge. Separiamo allora l'integrazione in due parti, una su un piccolo intorno dello 0 e l'altra sul resto:

$$E_r(t) \leq \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right] P_r(s) |f(t) - f(t - s)| ds.$$

La funzione f è continua in un intervallo chiuso e limitato e quindi limitata da una costante M . Per $|s| > \delta$ il massimo di $P_r(s)$ è maggiorato da $\frac{1-r^2}{2r(1-\cos(\delta))}$ che tende a zero per r che tende a 1. Quindi

$$E_r(t) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(s) |f(t) - f(t - s)| ds + 2M \frac{1-r^2}{2r(1-\cos(\delta))}.$$

La funzione f è continua su \mathbb{T} , ma poichè \mathbb{T} è compatto (=chiuso e limitato) per il *Teorema di Heine-Cantor* è anche uniformemente continua. Si fissi allora un ϵ arbitrario, dalla continuità uniforme segue che esiste un $\delta > 0$ tale che per tutti i t e s con $|s| < \delta$ si ha $|f(t) - f(t - s)| < \epsilon/2$. Quindi, per ogni ϵ esiste un δ tale che

$$E_r(t) \leq \frac{\epsilon}{2} + 2M \frac{1-r^2}{2r(1-\cos(\delta))}.$$

Si prenda r così vicino a 1 che il secondo termine sia minore di $\epsilon/2$. Allora

$$E_r(t) \leq \epsilon.$$

Che è quanto si voleva dimostrare: l'errore tende a zero uniformemente in t , cioè la funzione $u(z)$, armonica nel disco \mathbb{D} converge *uniformemente* al suo valore assegnato f sulla frontiera \mathbb{T} quando z tende a un punto della frontiera.