

17.13 COMPLEMENTI

17.13.1 Schema riassuntivo

SPAZIO VETTORIALE Sui reali o sui complessi. Si assume sia noto tutto al riguardo. In particolare, che la dimensione di uno spazio vettoriale è la cardinalità di una sua base.

SPAZIO METRICO Insieme equipaggiato con una nozione di distanza, o metrica, tra coppie di suoi elementi, avente le seguenti proprietà

1. $d(x, y) \geq 0$ (positività)
2. $d(x, y) = 0$ sse $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria)
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (disuguaglianza triangolare)

[Si osservi che (1) segue da (2,3,4).]

SUCCESSIONE DI CAUCHY Successione (x_n) di punti in un spazio metrico con la seguente proprietà: per ogni $\epsilon > 0$ esiste intero positivo N tale che per tutti $m, n > N$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

SPAZIO METRICO COMPLETO Spazio metrico in cui ogni successione di Cauchy di suoi elementi converge a un suo elemento.

SPAZIO VETTORIALE NORMATO Spazio vettoriale equipaggiato con una nozione di lunghezza, o norma, avente le seguenti proprietà

1. $\|v\| > 0$ se $v \neq 0$
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianza triangolare)

Uno spazio vettoriale normato è automaticamente metrico, con distanza indotta dalla norma, $d(u, v) = \|u - v\|$.

SPAZIO VETTORIALE NORMATO COMPLETO, ALIAS "SPAZIO DI BANACH" Spazio metrico vettoriale normato, completo rispetto alla metrica $d(u, v) = \|u - v\|$ indotta dalla norma.

CRITERIO DI COMPLETEZZA PER UNO VETTORIALE SPAZIO NORMATO Uno spazio vettoriale normato è completo se e solo se ogni serie assolutamente convergente nello spazio è convergente. In altre parole, il criterio di completezza è

$$\text{Se } \sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| < \infty \text{ allora } \sum_{k=1}^{\infty} v_k \text{ converge} \quad (17.24)$$

Si veda la dimostrazione 6 nella sezione 17.13.2.

SPAZIO VETTORIALE CON PRODOTTO SCALARE, ALIAS "SPAZIO PRE-HILBERTIANO" Spazio vettoriale equipaggiato con nozioni di angolo (tra vettori) e lunghezza (di vettori), compattamente riassunte dalla nozione di prodotto scalare $\langle \cdot | \cdot \rangle$, avente le seguenti proprietà

1. $\langle \phi | \psi \rangle = \overline{\langle \psi | \phi \rangle}$ (simmetria coniugata)
2. $\langle \phi | \alpha\psi + \beta\chi \rangle = \alpha\langle \phi | \psi \rangle + \beta\langle \phi | \chi \rangle$ (linearità nel secondo argomento)
3. $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$ (=0 sse $\psi = 0$) (positività)

Si osservi che (1) e (2) implicano $\langle \alpha\psi + \beta\chi | \phi \rangle = \bar{\alpha}\langle \psi | \phi \rangle + \bar{\beta}\langle \chi | \phi \rangle$ (il prodotto scalare è dunque una forma detta hermitiana o sesquilineare, cioè una forma definita su coppie di vettori di uno spazio vettoriale complesso che è lineare in un argomento e antilineare nell'altro).

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE DI UNO SPAZIO PRE-HILBERTIANO

(1) Vale la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$|\langle \phi | \psi \rangle| \leq \|\phi\| \|\psi\| .$$

dove

$$\|\phi\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \phi | \phi \rangle}, \quad \|\psi\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$$

(2) Uno spazio pre-hilbertiano è normato, con norma

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$$

ed è quindi uno spazio metrico, con distanza indotta dalla norma

$$d(\psi, \phi) = \|\psi - \phi\| = \sqrt{\langle \psi - \phi | \psi - \phi \rangle} .$$

SPAZIO VETTORIALE CON PRODOTTO SCALARE COMPLETO, ALIAS "SPAZIO DI HILBERT" Spazio vettoriale con prodotto scalare completo nella metrica indotta dal prodotto scalare. Dunque, uno spazio di Hilbert è automaticamente uno spazio di Banach.

SISTEMA ORTONORMALE IN UNO SPAZIO DI HILBERT Una successione (limitata o infinita) di vettori $\{\mathbf{e}_n\}$ per cui $\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{e}_m \rangle = 0$ e $\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{e}_n \rangle = \|\mathbf{e}_n\| = 1$.

CRITERIO DI CONVERGENZA DI UNA SERIE DI FOURIER GENERALIZZATA Per un vettore \mathbf{u} in uno spazio di Hilbert e sistema ortonormale $\{\mathbf{e}_n\}$:

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{e}_n\rangle \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle \quad \text{se e solo se} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 = \|\mathbf{u}\|^2$$

DISUGUAGLIANZA DI BESSEL Vettore \mathbf{u} e sistema ortonormale $\{\mathbf{e}_n\}$ in uno spazio di Hilbert. Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2$$

DEFINIZIONE DI SISTEMA ORTONORMALE COMPLETO O BASE ORTONORMALE $\{\mathbf{e}_n\}$ Se

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \quad (\text{identità di Parseval})$$

per *qualsunque* vettore \mathbf{u} nello spazio di Hilbert.

SPAZIO DI HILBERT SEPARABILE Quando ammette un sistema ortonormale completo *numerabile*.

SISTEMA ORTOGONALE CHIUSO Quando non esiste alcun vettore non nullo nello spazio di Hilbert che sia ortogonale a tutti gli elementi del sistema.

CRITERIO DI COMPLETEZZA DI UNA BASE ORTONORMALE Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema ortonormale sia completo è che sia chiuso.

17.13.2 Dimostrazioni di alcuni teoremi

Dimostrazione 1 (Convergenza nella norma uniforme = convergenza uniforme). Se (f_n) è una successione di funzioni continue in $[a, b]$, allora

$$f_n \xrightarrow{\text{uniforme}} f \Leftrightarrow \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (17.25)$$

A questo proposito, ricordiamo che convergenza uniforme significa che per ogni ϵ positivo esiste un N , lo stesso per tutti gli x in $[a, b]$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

per tutti gli $n \geq N$ e tutti gli x in $[a, b]$. È quindi facile vedere la direzione \Rightarrow della (17.25): se $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ e per tutti gli x in $[a, b]$, lo stesso vale quando si passa a sup, e viceversa. La direzione \Leftarrow è altrettanto facile ed è lasciata come esercizio. \square

Dimostrazione 2 (Completezza di $C[a, b]$ rispetto alla norma uniforme). Si osservi che per x fissato, $(f_n(x))$ è una successione di Cauchy di numeri reali e quindi esiste il limite $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ (convergenza puntuale). Ma la convergenza è anche uniforme. Infatti, essendo (f_n) è una successione di Cauchy allora c'è un N , indipendente da x , tale che $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, per tutti gli n e m maggiori di N . Il che implica che $|f(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$ per tutti gli $m \geq N$ e gli $x \in [a, b]$. Ergo, f_m converge a f uniformemente. Poiché f è il limite uniforme di funzioni continue, f stessa è continua e quindi (f_n) converge a f in $C[a, b]$. \square

Dimostrazione 3 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Dimostriamo la (17.5),

$$|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| .$$

Se $\mathbf{v} = 0$ la disuguaglianza è banalmente verificata. Assumiamo $\mathbf{v} \neq 0$ e consideriamo $\|\mathbf{u} - t\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}\| \geq 0$, dove t è un qualunque numero reale. Sviluppamo la norma sulla base della (17.4),

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\mathbf{u} - t\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} - t\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v} | \mathbf{u} - t\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 - 2|\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle|^2 t + |\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle|^2 \|\mathbf{v}\|^2 t^2 \end{aligned}$$

Si scelga il valore di t che minimizza la forma quadratica a secondo membro: derivando rispetto al tempo si ottiene $t = 1 / \|\mathbf{v}\|^2$. Allora

$$0 \leq \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle - \frac{|\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle|^2}{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle}$$

che è vera sse $|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz risulta così verificata. \square

Dimostrazione 4 (Disuguaglianza triangolare). *Dimostriamo la disuguaglianza triangolare per la norma indotta dal prodotto scalare. Si ha*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \quad (\text{per Cauchy-Schwarz}) \\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \end{aligned}$$

□

Dimostrazione 5 (Completezza di ℓ^2). *Dimostriamo che ogni successione di Cauchy in ℓ^2 converge ad un elemento di ℓ^2 . Sia $(\mathbf{z}^{(n)})$ una qualunque successione di Cauchy in ℓ^2 , cioè tale che*

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{z}^{(m)}\| = 0$$

e dimostriamo che esiste un elemento $\mathbf{z} \in \ell^2$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{z}\| = 0 \quad (17.26)$$

Osserviamo che, essendo per ogni indice k

$$|z_k^{(n)} - z_k^{(m)}| \leq \|\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{z}^{(m)}\|,$$

esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_k^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} z_k.$$

Proviamo ora che la successione $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots)$ è in ℓ^2 . Infatti, fissato un generico N , tronchiamo le successioni fino a N , ottenendo così vettori nello spazio vettoriale finito dimensionale \mathbb{C}^N . Denotiamo con un pedice N i vettori così ottenuti e consideriamo la disuguaglianza triangolare in \mathbb{C}^N

$$\|\mathbf{z}_N^{(n)}\| \leq \|\mathbf{z}_N^{(n)} - \mathbf{z}_N^{(m)}\| + \|\mathbf{z}_N^{(m)}\|$$

cioè

$$\sqrt{\sum_{k=1}^N |z_k^{(n)}|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^N |z_k^{(n)} - z_k^{(m)}|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^N |z_k^{(m)}|^2}$$

L'osservazione importante è che il primo membro è limitato da una costante indipendente da n e da N , possiamo quindi passare al limite $n \rightarrow \infty$ a primo membro e stabilire così la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^N |z_k|^2$$

Per provare ora la (17.26), osserviamo che, fissato $\epsilon > 0$, esiste N_ϵ tale che per tutti gli n e m maggiori di N_ϵ , si ha (essendo $(\mathbf{z}^{(n)})$ una successione di Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k^{(m)} - z_k^{(n)}|^2 < \epsilon^2$$

da qui, passando al limite per $m \rightarrow \infty$, segue

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k - z_k^{(n)}|^2 < \epsilon^2,$$

cioè la (17.26). □

Dimostrazione 6 (Criterio di completezza per uno vettoriale spazio normato). Se lo spazio è completo e $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| < \infty$, si consideri le somme parziali $s_n = \sum_{k=1}^n v_k$. Dalla disuguaglianza triangolare, per $m < n$ si ha

$$\|s_n - s_m\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|v_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|v_k\| < \epsilon$$

se m è abbastanza grande, il che mostra che (s_n) è una successione di Cauchy. Viceversa, si assuma che ogni serie assolutamente convergente sia convergente e si consideri una successione di Cauchy (u_n) . Si prenda successivamente $k_1 < k_2 < \dots$ in modo tale che $\|u_m - u_n\| < 2^{-j}$ quando $m, n \geq k_j$. Si ponga $v_1 = u_{k_1}$ e $v_{k_j} = u_{k_{j+1}} - u_{k_j}$. Allora $\|v_j\| < 2^{-j}$ per $j > 2$ e quindi $\sum_{j=1}^{\infty} v_j$ è assolutamente convergente e quindi convergente. Poiché $u_{k_j} = v_1 + v_2 + \dots + v_{k_j}$, la successione (u_{k_j}) è convergente. Abbiamo mostrato che ogni successione di Cauchy ha una sottosuccessione convergente, che è abbastanza per dimostrare la completezza. □

Dimostrazione 7 (Se un sistema ortonormale $\{\mathbf{e}_n\}$ è completo è anche chiuso e viceversa). Supponiamo che il sistema ortonormale $\{\mathbf{e}_n\}$ sia completo. Se non fosse anche chiuso esisterebbe un vettore \mathbf{v} con $\|\mathbf{v}\| > 0$ tale $\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{v} \rangle = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. In tal caso avremmo

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{v} \rangle < \|\mathbf{v}\| ,$$

contro l'ipotesi che il sistema sia completo. Viceversa, se $\{\mathbf{e}_n\}$ fosse chiuso ma non completo, esisterebbe un vettore \mathbf{u} tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{e}_n \rangle \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle \neq \mathbf{u}$$

e per il vettore

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{e}_n \rangle \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle$$

risulterebbe

$$\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

contro l'ipotesi che $\{\mathbf{e}_n\}$ sia chiuso. □

Dimostrazione 8 (Riesz-Fisher). Per $\{\mathbf{e}_n\}$ fissato, vogliamo dimostrare che se $\{c_n\}$ è una successione di numeri tale che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ converge, allora esiste uno ed un solo vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ tale che $\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n$ e

$$c_n = \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.27)$$

Incominciamo col dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n$$

è convergente. Infatti, posto

$$\mathbf{s}_n = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{e}_i$$

si ha per $n > m$

$$\|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^n c_i \mathbf{e}_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^n |c_i|^2$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ converge per ipotesi, ne segue che

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_m\|^2 = 0$$

e quindi, essendo lo spazio di Hilbert completo (ogni successione di Cauchy converge ad un elemento dello spazio), esiste un vettore \mathbf{u} nello spazio di Hilbert tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{s}_n = \mathbf{u}$, cioè

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n$$

Il vettore \mathbf{u} ora trovato, a causa del teorema 2 della lezione 13, soddisfa le (17.27). Si osservi che nell'ottenere questo risultato non abbiamo sfruttato la completezza del sistema ortonormale $\{\mathbf{e}_n\}$. Se adesso assumiamo che $\{\mathbf{e}_n\}$ sia completo, e quindi chiuso, è facile mostrare che il vettore \mathbf{u} trovato deve essere unico. Infatti, se esistessero due vettori \mathbf{u} e \mathbf{u}' che soddisfano le (17.27), allora

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{u}' | \mathbf{e}_n \rangle = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ed essendo il sistema chiuso deve essere $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$.