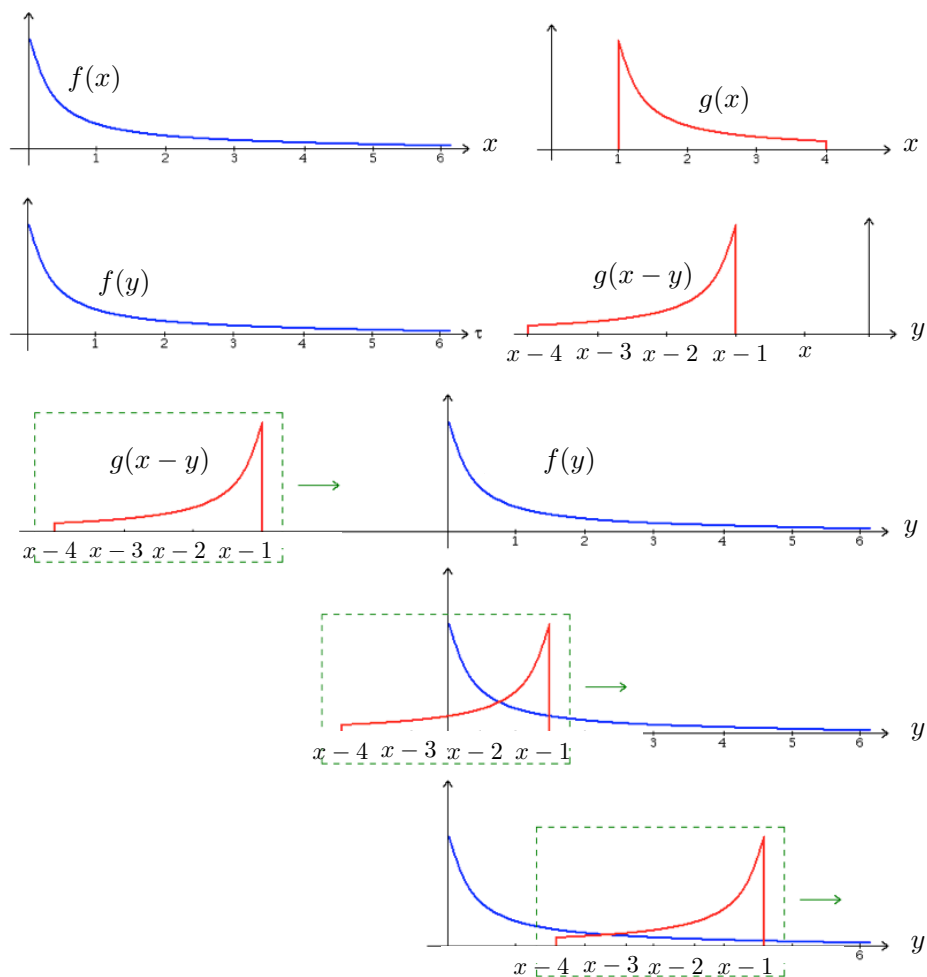


## 18.12 COMPLEMENTI

## 18.12.1 Calcolo grafico del prodotto di convoluzione

Graficamente, possiamo calcolare  $f \star g$  in un punto  $x$  riflettendo il grafico di  $g(y)$  rispetto all'asse verticale e traslandolo a sinistra di una distanza  $y$  per ottenere  $g(x - y)$ ; lo si moltiplichi adesso per  $f(y)$  e si calcoli l'area sotto il grafico del prodotto risultante  $f(y)g(x - y)$  per  $y \in [-\pi, \pi]$ ; infine si divida per  $2\pi$ . Questo procedimento è illustrato nella figura sotto.



## 18.12.2 Qual è la struttura fondamentale dell'analisi di Fourier?

L'analisi di Fourier che abbiamo visto finora può essere "trasformata" in due direzioni opposte: ristretta verso il discreto, cioè rivolta alle funzioni ottenute per discretizzazione finita dell'intervallo  $[-L/2, L/2]$ , oppure estesa al caso in cui il periodo  $L$  aumenta a dismisura fino a che  $[-L/2, L/2]$  diventa l'intera retta reale. Naturalmente, si potrà parlare ancora di analisi di Fourier, seppure in un senso generalizzato, se queste "trasformazioni" preservano in qualche modo la struttura fondamentale dell'analisi di Fourier. Ma qual è la struttura fondamentale dell'analisi di Fourier?

L'essenza dell'analisi di Fourier classica è quella di decomporre un segnale periodico in una somma pesata di armoniche, dove ciascuna armonica ha una frequenza che è un multiplo intero della frequenza fondamentale. In effetti, l'analisi di Fourier è comunemente chiamata anche *analisi armonica*.

È importante sottolineare che tutte le armoniche sono generate dall'armonica fondamentale  $e(x) = e^{i\omega x}$ , di frequenza angolare  $\omega$ , nel seguente modo

$$e_1(x) = e(x), e_2(x) = e(x)^2 = e^{i\omega 2x}, \dots, e_n(x) = e(x)^n = e^{i\omega nx}, \dots$$

(Quando, per semplicità, lavoriamo in  $\mathbb{T}$ , come torneremo a fare tra poco,  $\omega = 1$ .) Le potenze negative danno le frequenze negative (cioè moti circolari nella direzione opposta),

$$e_{-n}(x) = e(x)^{-n} = e^{-i\omega nx}$$

e, naturalmente,

$$e_{-n}(x)e_n(x) = 1$$

cioè il modo zero. In breve, l'insieme delle armoniche  $e_n(x) = e^{inx}$  forma una rappresentazione moltiplicativa del gruppo additivo degli interi  $\mathbb{Z}$ , nel senso che

$$\begin{aligned} e_{n+m}(x) &= e_n(x)e_m(x) \\ e_{-n}(x) &= e_n(x)^{-1} \end{aligned}$$

L'armonica fondamentale  $e^{i\omega x}$  è chiamata generatore del gruppo.

È questa proprietà di gruppo, tutto sommato abbastanza astratta, che rende conto matematicamente del significato concreto dell'analisi di Fourier. Quando combiniamo questa proprietà con l'altro aspetto fondamentale dell'analisi di Fourier, che è la decomposizione di un vettore rispetto ad una base ortonormale, otteniamo tutto quello che c'è da dire sull'analisi di Fourier. E tutto questo può essere riassunto in 6 punti:

- (I) Ad ogni funzione  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  è associata una *successione*  $\{c_n\} = \{\widehat{f}(n)\}$  di numeri complessi. Questi numeri sono noti come *coordinate* (o coefficienti) *di Fourier* di  $f$ .
- (II) La coordinate di Fourier sono date dalla formula

$$c_n = \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx \quad \text{per } n \in \mathbb{Z}$$

- (III) I mattoni di base delle serie di Fourier sono le *funzioni trigonometriche*  $e_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  date da

$$e_n(x) = e^{inx}, \quad \text{dove } n \in \mathbb{Z} \text{ e } x \in \mathbb{T}$$

(sono chiamate trigonometriche piuttosto che esponenziali per sottolineare il legame con seni e coseni dato dalla formula di Eulero). L' $n$ -esima coordinata di Fourier può essere scritta in termini di prodotto scalare  $L^2$  come

$$c_n = \widehat{f}(n) = \langle e_n | f \rangle.$$

- (IV) L'insieme delle *funzioni trigonometriche*  $e_n(x) = e^{inx}$  forma una rappresentazione moltiplicativa del gruppo additivo degli interi  $\mathbb{Z}$ , nel senso che

$$\begin{aligned} e_{n+m}(x) &= e_n(x)e_m(x) \\ e_{-n}(x) &= e_n(x)^{-1} \end{aligned}$$

(V) La serie associata a  $f$  è

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Usiamo il simbolo  $\sim$  invece del simbolo  $=$  per mettere in evidenza che per un dato punto  $x$ , la serie di Fourier non necessariamente si somma al valore  $f(x)$ , in verità, nel punto  $x$ , la serie di Fourier può non convergere del tutto.

(VI) L'insieme  $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  forma una *base ortonormale* per lo spazio vettoriale  $L^2(\mathbb{T})$  delle funzioni a quadrato integrabile su  $\mathbb{T}$ . In particolare, questo significa che per  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , le somme parziali di  $f$  convergono a  $f$  nel senso  $L^2$ , cioè

$$\left\| f - \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{inx} \right\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow \infty$$

e vale l'identità di Parseval (cioè il teorema di Pitagora infinito-dimensionale)

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|\hat{f}\|_{\ell^2}^2$$

### 18.12.3 Analisi armonica nel discreto

Consideriamo la seguente situazione: nel suo intervallo fondamentale, il segnale è un vettore  $v$  con un numero finito di componenti complesse, diciamo  $N$ . Quindi è un vettore in  $\mathbb{C}^N$ . Poi è ripetuto con periodicità a destra e a sinistra. Quale analisi armonica è appropriata per una situazione come questa?

Incominciamo col fissare le notazioni. Si consideri la base standard in  $\mathbb{C}^N$ , che conveniamo di denotare con dei ket,

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad |N-1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

(La ragione di questa notazione non convenzionale, sia per i ket sia per partire da 0 anziché da 1, apparirà chiara tra poco.) Denotiamo un generico vettore di questa base con

$$|\alpha\rangle, \quad \alpha = 0, 1, \dots, N-1$$

Il prodotto scalare in  $\mathbb{C}^N$  è

$$\langle v | u \rangle = \sum \overline{v(\alpha)} u(\alpha) = \sum \langle v | \alpha \rangle \langle \alpha | u \rangle$$

e

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$$

dove  $\delta_{\alpha\beta}$  è la delta di Kronecker. Allora, per un vettore  $v \in \mathbb{C}^N$  possiamo scrivere

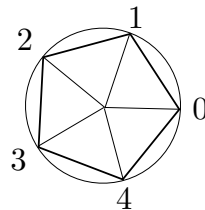
$$|v\rangle = \sum |\alpha\rangle \langle \alpha | v \rangle$$

sottintendendo che tutte le somme d'ora in avanti corrono da 0 a  $N - 1$ . Si osservi che  $\langle \alpha | v \rangle$  è la  $\alpha$ -esima componente del vettore. Possiamo, per comodità, pensare a  $v$  come ad una funzione definita sull'insieme finito di punti  $\alpha = 0, 1, \dots, N - 1$ , e a valori in  $\mathbb{C}$ , e scrivere

$$v(\alpha) = \langle \alpha | v \rangle$$

Adesso torniamo al problema di partenza. Vogliamo analizzare il segnale discreto  $v(\alpha)$  in termine di armoniche: è chiaro che non possiamo aspettarcene più di  $N$ . Se vogliamo mantenere la struttura fondamentale dell'analisi di Fourier, dobbiamo cercare un analogo della proprietà (IV) per un insieme discreto.

L'insieme  $C_N$  delle radici n-esime dell'unità,  $C_N = \{z \in \mathbb{C} | z^N = 1\}$  è un gruppo abeliano rispetto all'operazione di moltiplicazione con  $N$  elementi ed è il gruppo ciclico di ordine  $N$ . In effetti, è una rappresentazione del gruppo additivo modulo  $N$ . Per esempio, per  $N = 5$  il gruppo additivo si rappresenta con i vertici di un pentagono regolare



e le addizioni sono costruite per ciclicità, per esempio:  $1 + 2 = 3$ ,  $1 + 4 = 0$ ,  $2 + 4 = 1$  etc.. La sua rappresentazione moltiplicativa è data dalle radici quinte complesse:  $1, e^{i2\pi/5}, e^{i4\pi/5}, e^{i6\pi/5}, e^{i8\pi/5}$  e si verifica facilmente che si tratta proprio di una rappresentazione: si consideri, per esempio,  $1 + 2 = 3$ , questo è rappresentato in  $e^{i2\pi/5} e^{i4\pi/5} = e^{i6\pi/5}$ , oppure  $1 + 4 = 0 \rightarrow e^{i2\pi/5} e^{i8\pi/5} = 1$ , cioè l'elemento neutro rispetto all'addizione (o) è trasformato nell'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione. E così via.

Per l'analisi armonica in uno spazio a  $N$  dimensioni, considereremo allora

$$e(\alpha) = e^{i2\pi\alpha/N}$$

come armonica fondamentale. Il sistema di armoniche generato da  $e(\alpha)$  consiste dunque negli  $N$  vettori  $\tilde{e}_n$ , con componenti  $e(\alpha)^n$  rispetto alla base  $|\alpha\rangle$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  (per  $n = N$  si ritorna a  $n = 0$ ), cioè

$$\langle \alpha | \tilde{e}_n \rangle = e(\alpha)^n = e^{i2\pi n\alpha/N}, \quad \text{dove } \alpha = 0, 1, \dots, N - 1 \quad \text{e } n = 0, 1, \dots, N - 1$$

Si verifica facilmente che i vettori  $\tilde{e}_n$  sono ortogonali tra loro e hanno tutti norma uguale a  $\sqrt{N}$  (esercizio):

$$\langle \tilde{e}_n | \tilde{e}_m \rangle = N\delta_{nm}.$$

È quindi conveniente passare alla base ortonormale

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{e}_n, \quad \langle \alpha | e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i2\pi n\alpha/N} = e_n(\alpha)$$

La trasformata di Fourier discreta del segnale discreto  $v(\alpha)$  è definita come

$$\hat{v}(n) = \langle e_n | v \rangle = \sum_{\alpha} v(\alpha) \overline{e_n(\alpha)} \quad \text{ovvero} \quad \hat{v}(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\alpha} v(\alpha) e^{-i2\pi n\alpha/N}$$

Poichè  $\{e_n\}$  è una base ortonormale, la trasformata di Fourier discreta è una trasformazione unitaria e si ha

$$v(\alpha) = \langle \alpha | v \rangle = \sum_n \langle \alpha | e_n \rangle \langle e_n | v \rangle = \sum_n \hat{v}(n) e_n(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \hat{v}(n) e^{i2\pi n\alpha/N}$$

e vale l'analogo finito dell'identità di Parseval (che è proprio il teorema di Pitagora finito-dimensionale).

Si osservi che avremmo potuto convenire di assorbire il fattore di normalizzazione nel prodotto scalare e definire in  $\mathbb{C}^N$  il nuovo prodotto scalare

$$\langle v | u \rangle = \frac{1}{N} \sum f(\alpha) \overline{u(\alpha)} = \frac{1}{N} \sum \langle f | \alpha \rangle \langle \alpha | u \rangle$$

(che, con abuso di notazione, denotiamo nello stesso modo di prima) e utilizzare come armoniche le  $\tilde{e}_n \sim e^{i2\pi n\alpha/N}$ , che nel nuovo prodotto scalare sono automaticamente normalizzate. Allora, con questo nuovo prodotto scalare, le formule per la trasformata di Fourier discreta e la sua inversa diventano

$$\begin{aligned} \hat{v}(n) &= \langle \tilde{e}_n | v \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\alpha} v(\alpha) e^{-i2\pi n\alpha/N} && \text{("analisi")} \\ v(\alpha) &= \langle \alpha | v \rangle = \sum_n \hat{v}(n) e^{i2\pi n\alpha/N} && \text{("sintesi")} \end{aligned}$$

ESEMPIO 18.3.  $N=5$ . Posto  $e^{i2\pi/5} = \varepsilon$ , si ha (rispetto al prodotto scalare usuale) la seguente base ortonormale di Fourier:

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 \\ \varepsilon^4 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^4 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^3 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon^3 \\ \varepsilon^4 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon^4 \\ \varepsilon^3 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

La matrice della trasformata di Fourier discreta è ottenuta come la matrice le cui colonne sono i vettori testé trovati (che è la regola generale per la matrice di cambiamento di base).

A questo punto, ecco una domanda su cui riflettere: in che modo i sei punti indicati all'inizio della lezione come caratterizzanti dell'analisi di Fourier si sono trasformati nel passaggio dal continuo al discreto? Chiaramente, tutti i problemi di convergenza sono evaporati, ma che dire del resto? È ragionevole dire che la struttura di base è preservata? Comunque si risponda a questa domanda, c'è un senso preciso in cui l'analisi di Fourier discreta approssima quella continua, che è quello di cui ci vogliamo occupare adesso.

Prima un'osservazione di cosmetica. L'analisi di Fourier nel discreto può essere resa ancora più simile a quella nel continuo se consideriamo un numero  $N$  dispari. Se  $N$  è dispari è naturale scegliere una numerazione simmetrica dello spazio delle  $\alpha$ :

$$-(N-1)/2, -(N-2)/2, \dots, -2-1, 0, 1, 2, \dots, (N-2)/2, (N-1)/2$$

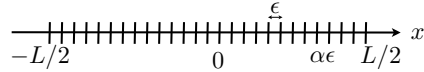
e analogamente per i vettori  $|\alpha\rangle$  e i vettori  $e_n$ . Le formule per la trasformata di Fourier e la sua inversa (le ultime che abbiamo ricavato), restano inalterate

$$\begin{aligned} \hat{v}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha} v(\alpha) e^{-i2\pi n\alpha/N} && \text{("analisi")} \\ v(\alpha) &= \sum_n \hat{v}(n) e^{i2\pi n\alpha/N} && \text{("sintesi")} \end{aligned}$$

ma le somme adesso sono da  $-(N-1)/2$  a  $(N-1)/2$ .

Adesso mostriamo che l'analisi di Fourier nel discreto è in effetti un'approssimazione di quella nel continuo. Poiché consideriamo  $N \gg 1$ , trascureremo la differenza tra  $N$  e  $N-1$ .

Siamo interessati al caso in cui i valori discreti del segnale  $v(\alpha)$  sono stati ottenuti campionando un segnale continuo  $f(x)$  di periodo  $L$ , ad intervalli di ampiezza  $\epsilon$ . Dunque,  $N = L/\epsilon$  e  $v(\alpha) = f(x)$  per  $x = \alpha\epsilon$ , al variare di  $\alpha$  da  $-N/2$  a  $N/2$ . Abbiamo cioè la discretizzazione dell'intervallo reale  $[-L/2, L/2]$  in blocchi di ampiezza  $\epsilon = L/N$  come mostrato in figura:



Consideriamo la formula per le coordinate di Fourier discrete

$$\hat{v}(n) = \frac{1}{N} \sum_{\alpha} v(\alpha) e^{-i2\pi n\alpha/N} = \frac{\epsilon}{L} \sum_{\alpha} f(\alpha\epsilon) e^{-i2\pi n\alpha\epsilon/L} = \frac{\epsilon}{L} \sum_{\alpha} f(x) e^{i\frac{2\pi}{L}nx}$$

Nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$  riconosciamo a secondo membro il limite della somma di Riemann dell'integrale

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{L}nx} dx,$$

cioè

$$\hat{v}(n) \rightarrow \hat{f}(n).$$

Quando  $\epsilon \rightarrow 0$  si ha  $N \rightarrow \infty$  e quindi la formula per la "sintesi" diventa

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{v}(n) e^{i\frac{2\pi}{L}nx} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{i\frac{2\pi}{L}nx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i\frac{2\pi}{L}nx}$$

In breve, abbiamo mostrato euristicamente (cioè senza preoccuparci troppo dell'esistenza dei limiti) che nel limite continuo l'analisi di Fourier discreta diventa l'usuale analisi di Fourier, basata sulle relazioni

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{L}nx} dx \quad (18.27)$$

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{i\frac{2\pi}{L}nx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i\frac{2\pi}{L}nx} \quad (18.28)$$

#### 18.12.4 Analisi armonica in un intervallo infinito

Vogliamo adesso capire che cosa succede alle relazioni (18.27) e (18.28) quando l'intervallo  $[-L/2, L/2]$  aumenta a dismisura fino a ricoprire l'intera retta reale.

Se assumiamo che la funzione  $f(x)$  sia "buona", l'integrale a secondo membro della (18.27) convergerà nel limite di grandi  $L$ , ma il fattore  $1/L$  davanti farà tendere a zero le coordinate di Fourier. È dunque utile passare a coordinate dimensionate per le coordinate e riscalarle con un fattore  $L$  in modo da garantire che si abbia un limite finito non nullo. A tal fine, definiamo

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{L} \quad (18.29)$$

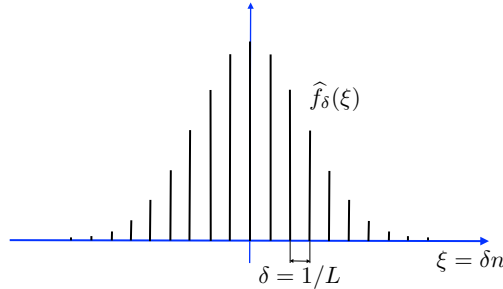
$$y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n}{L} = \delta n \quad (18.30)$$

$$\hat{f}_{\delta}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\delta} \hat{f}(n) = \frac{1}{\delta} \hat{f}\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (18.31)$$

e sostituiamo nella (18.27). Si ottiene

$$\widehat{f}_\delta(y) = \frac{1}{\delta} \widehat{f}\left(\frac{y}{\delta}\right) = \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i2\pi yx} dx$$

Consideriamo un possibile grafico delle coordinate di Fourier riscalate  $\widehat{f}_\delta$  (assumendole per semplicità reali). Il grafico mostra chiaramente che nel limite, quando la distanza tra due punti sulle ascisse si avvicina sempre più, si dovrebbe ottenere, almeno euristicamente, una funzione limite  $\widehat{f}(y)$  definita su tutti i punti dell'asse delle  $y$ .



Possiamo aspettarci un limite finito e non nullo per  $\delta$  arbitrariamente piccolo o, equivalentemente, per  $L$  arbitrariamente grande, se  $f(x)$  è “buona”: deve essere non solo regolare, ma anche con decrescenza abbastanza rapida al crescere di  $|x|$  in modo tale che l’integrale improprio

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi yx} dx,$$

che si ottiene nel limite  $\delta = 1/L \rightarrow 0$ , sia finito.

Consideriamo adesso la somma parziale della serie di Fourier in (18.28):

$$\sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{i\frac{2\pi}{L}nx}$$

Tenuto conto della (18.31), possiamo riscrivere la somma parziale come

$$S_N = \delta \sum_{n=-N}^N \widehat{f}_\delta(y) e^{i2\pi yx} \quad (18.32)$$

Se adesso facciamo crescere  $N$  come  $1/\delta = L$ , riconosciamo in  $S_N$  la somma di Riemann che nel limite  $N \rightarrow \infty$  diventa l’integrale (improprio)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{i2\pi yx} dy = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$$

È difficile trasformare le argomentazioni euristiche precedenti in una dimostrazione rigorosa. Sappiamo però se  $f(x)$  è buona, nel limite del periodo  $L$  che va all’infinito — e tenuto conto del riscaldamento (18.31) — i processi di analisi e sintesi dell’analisi di Fourier diventano

$$\begin{aligned} \widehat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi yx} dx \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{i2\pi yx} dy \end{aligned}$$

Nel capitolo 21 ne verrà studiata l’estensione a  $L^2(\mathbb{R})$ .