

1.9 PROBLEMI

PROBLEMA 1.1. →

Utilizzando l'algebra complessa e la formula di Eulero, dimostrare le seguenti identità trigonometriche:

- (a) $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$
- (b) $\sin 3\theta = -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta$
- (c) $\cos^4 \theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3)$
- (d) $\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$

PROBLEMA 1.2. →

Per determinare la formula risolutiva dell'equazione cubica $x^3 = 3px + 2q$, procedere nel modo seguente:

- (i) Fare la sostituzione $x = s + t$, e dedurre che x risolve la cubica se $st = p$ e $s^3 + t^3 = 2q$.
- (ii) Eliminare t in queste due equazioni e ottenere un'equazione quadratica in s^3 .
- (iii) Risolvere la quadratica per ottenere i due possibili valori di s^3 . Per simmetria, quali sono i possibili valori di t^3 ?
- (iv) Dato che $s^3 + t^3 = 2q$, dedurre la formula (1.1).

PROBLEMA 1.3. →

Un fatto di base nella teoria dei numeri è questo: *se due interi possono essere espressi come somma di due quadrati, allora lo stesso vale per il loro prodotto*. Sottinteso che ogni simbolo seguente denoti un intero, questo significa che se $M = a^2 + b^2$ e $N = c^2 + d^2$, allora $MN = p^2 + q^2$. Dimostrare questo fatto considerando $|(a + ib)(c + id)|^2$.

PROBLEMA 1.4. →

Siano A, B, C, D quattro punti sul cerchio unitario. Se $A + B + C + D = 0$, mostrare che i punti devono formare un rettangolo.

PROBLEMA 1.5. →

Se $z = e^{i\theta} \neq -1$, allora

$$z - 1 = \left(i \tan \frac{\theta}{2} \right) (z + 1).$$

Dimostrare questo sia con il calcolo sia geometricamente facendo un disegno.

PROBLEMA 1.6. →

Poiché se ne farà gran uso, dimostrate che la somma di un progressione geometrica complessa è

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}.$$

Quindi rispondete alle seguenti domande:

- (a) In quale regione di \mathbb{C} deve stare z affinché la serie infinita $1 + z + z^2 + \dots$ converga?
- (b) Se z sta in questa regione, a quale punto del piano la serie infinita converge?
- (c) Aiutandovi con un calcolatore, fate un disegno della serie infinita nel caso $z = (1/2)(1 + i)$ e verificate che converge al punto previsto in (b).

PROBLEMA 1.7. →

Sia

$$S = \cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \dots + \cos(2n - 1)\theta.$$

Dimostrare che

$$S = \frac{\sin 2n\theta}{2 \sin \theta}$$

o, equivalentemente,

$$S = \frac{\sin n\theta \cos n\theta}{\sin \theta}$$

PROBLEMA 1.8. →

Servirsi di un disegno per mostrare che se a e b sono dati numeri complessi, allora $|z - a| = |z - b|$ è l'equazione di una retta.

PROBLEMA 1.9. →

Si consideri l'equazione

$$(z - 1)^{10} = z^{10}.$$

- (a) Senza tentare di risolvere l'equazione, mostrare geometricamente che tutte e nove le soluzioni (perché non dieci?) devono stare sulla retta verticale $\text{Re}(z) = 1/2$ (si veda il problema 1.8).
- (b) Dividendo ambo i membri dell'equazione per z^{10} , l'equazione assume la forma $w^n = 1$, dove $w = (z - 1)/z$. Risolvere quindi l'equazione iniziale.

PROBLEMA 1.10. →

Disegnare il cerchio $|z - 1| = 1$. Trovare l'equazione polare dell'immagine di questo cerchio rispetto alla trasformazione $z \mapsto z^2$ e darne una rappresentazione grafica (la curva così ottenuta è detta *cardioide*).

PROBLEMA 1.11. →

Si consideri la famiglia di trasformazioni complesse

$$Z \mapsto M_a(z) = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}$$

- (i) Dimostrare che $M_a[M_a(z)] = z$. In altre parole M_a è *idempotente*.
- (ii) Dimostrare che M_a trasforma il cerchio unitario in se stesso.
- (iii) Mostrare che se $|a| < 1$, allora M_a trasforma il disco unitario in se stesso.

Aiuto: Usare $|q|^2 = q\bar{q}$ per verificare che

$$|\bar{a}z - 1|^2 - |z - a|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |z|^2).$$

PROBLEMA 1.12. →

Dimostrare che la famiglia di trasformazioni

$$z \mapsto M_{a,b,c,d}(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

trasforma linee e cerchi in linee e cerchi.

Aiuto: $\alpha|z|^2 + \beta(z + \bar{z}) + i\gamma(z - \bar{z}) + \delta = 0$ è l'equazione di un cerchio o di una linea in \mathbb{C} . Investigate $f(z) = \frac{1}{z}$ e scrivete

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \frac{1}{cz + d}.$$