

2.9 PROBLEMI

PROBLEMA 2.1. □ Utilizzando i metodi dell'analisi complessa trovare il raggio di convergenza dello sviluppo in serie della funzione

$$H(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

nell'intorno del numero reale u , dove $-1 < u < 1$.

PROBLEMA 2.2. □ Mostrare che ciascuna delle seguenti serie ha il cerchio unitario come disco di convergenza,

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

Investigare quindi la convergenza delle serie sul disco $|z| = 1$.

PROBLEMA 2.3. □ Si consideri la serie geometrica

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j$$

che converge a

$$\frac{1}{1-z}$$

dentro il disco unitario. I polinomi approssimanti in questo caso sono

$$P_m(z) = \sum_{j=0}^m z^j$$

(a) Mostrare che l'errore $E_m(z) \equiv |P(z) - P_m(z)|$ è dato da

$$E_m(z) = \frac{|z|^{m+1}}{|1-z|}$$

(b) Se z è un punto qualunque dentro il disco di convergenza, che cosa accade all'errore quando $m \rightarrow \infty$?

(c) Se fissiamo m , che cosa succede all'errore quando z si avvicina al bordo $|z| = 1$?

(d) Supponiamo di volere approssimare questa serie nel disco $|z| \leq 0.9$ e supponiamo inoltre che l'errore massimo che vogliamo tollerare è $\epsilon = 0.01$. Trovare il polinomio $P_m(z)$ di grado più basso che approssima $P(z)$ in tutto il disco con la precisione desiderata.

PROBLEMA 2.4. □ Data una funzione reale $f(\theta)$, $\pi < \theta \leq \pi$, la regola di calcolo esplicita per determinare i coefficienti della sua serie di Fourier

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta], \quad (2.17)$$

è

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta.$$

Ottenere questa regola (formalmente, cioè senza preoccuparsi di questioni di scambio di integrali con serie).

Aiuto: Per prima cosa verificate che $\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \sin n\theta d\theta$ si annulla, e che anche $\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta$ e $\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \sin n\theta d\theta$ e si annullano, a meno che non sia $m = n$.