

## 3.9 PROBLEMI

PROBLEMA 3.1. →

Dimostrare che la serie

$$z(1-z) + z^2(1-z) + z^3(1-z) + \dots$$

converge per  $|z| < 1$  e trovarne la somma.

PROBLEMA 3.2. →

Trovare la regione di convergenza della serie (non di potenze!)

$$1 + \frac{1}{1+z} + \left(\frac{1}{1+z}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+z}\right)^3 + \dots$$

PROBLEMA 3.3. →

Si consideri la serie del problema 3.1.

- (a) Dimostrare che la serie converge uniformemente alla somma  $z$  per  $|z| \leq 1/2$ .
- (b) La serie converge uniformemente per  $|z| \leq 1$ ? Spiegare.

PROBLEMA 3.4. →

Si consideri la successione

$$\frac{1}{1+nz}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- (a) Dimostrare che la successione è uniformemente convergente a 0 per ogni  $z$  tale  $|z| \geq 2$ .
- (b) Si può estendere la regione di uniforme convergenza data in (a)? Spiegare.

PROBLEMA 3.5. →

Dimostrare che la funzione somma del problema 3.1 è discontinua per  $z = 1$  e che il limite del problema 3.4 è discontinuo in  $z = 0$ .

PROBLEMA 3.6. →

Dimostrare che la funzione somma del problema 3.1 è assolutamente convergente per  $|z| < 1$ .

PROBLEMA 3.7. →

Dimostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$$

converge assolutamente per  $|z| \leq 1$ .

PROBLEMA 3.8. →

Verificare l'uniforme convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$$

nella regione  $|z| \leq 1$ .

PROBLEMA 3.9. →

Verificare l'uniforme convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}$$

nella regione  $1 < |z| < 2$ .

PROBLEMA 3.10. →

Verificare l'uniforme convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n^3}$$

nella regione  $|z| \leq 1$ .

PROBLEMA 3.11. →

Trovare la regione di convergenza della serie

$$1 + \frac{1}{1-z} + \frac{2z}{(1-z)^2} + \frac{4z^2}{(1-z)^3} + \dots$$

PROBLEMA 3.12. →

Dare un esempio di una coppia di serie di potenze centrate nell'origine, diciamo  $P(z)$  e  $Q(z)$ , tali che il disco di convergenza del prodotto  $P(z)Q(z)$  è maggiore di ciascuno dei due dischi di convergenza di  $P(z)$  e  $Q(z)$ .

*Aiuto:* Pensare in termini di funzioni razionali (ad es.,  $z^2/(5-z^3)$ ) che, come è noto, possono essere espresse come serie di potenze.

PROBLEMA 3.13. →

Determinare il raggio di convergenza della serie binomiale complessa

$$\begin{aligned} (1+z)^n &= 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!} z^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} z^3 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} z^4 + \dots \end{aligned}$$

dove  $n$  è un numero reale arbitrario.