

5.8 PROBLEMI

PROBLEMA 5.1. →

Dimostrare (eventualmente con metodi puramente geometrici) che l'inversione geometrica $z \mapsto 1/\bar{z}$ è anti-conforme.

PROBLEMA 5.2. → Dimostrare che l'inversione complessa $z \mapsto 1/z$ è conforme.

PROBLEMA 5.3. →

Dimostrare che le trasformazioni di Möbius sono conformi. (Si veda il problema 1.12 e i complementi alla fine di questo capitolo).

PROBLEMA 5.4. →

Mostrare che nessuna scelta della funzione reale $v = v(x, y)$ può rendere la funzione $f(x + iy) = (x^2 + y^2) + iv$ analitica.

PROBLEMA 5.5. →

Per $z \neq 0$, sia $f(z) \equiv f(x + iy) = xy/\bar{z}$.

- (a) Mostrare che $f(z)$ tende a 0 quando z tende verso qualunque punto dell'asse reale o dell'asse immaginario, inclusa l'origine.
- (b) Avendo stabilito che $f = 0$ su entrambi gli assi, dedurre che le equazioni di Cauchy-Riemann

sono soddisfatte nell'origine.

- (c) Malgrado questo, mostrare che f non è analitica in 0 (lo si mostri in termini di caratterizzazione geometrica: localmente, su vettori infinitesimi nello 0, f non agisce come una stiro-rotazione)

PROBLEMA 5.6. → Mostrare che $f(z) = e^z$ soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann e trovare $(e^z)'$.

PROBLEMA 5.7. → Si consideri l'inversione complessa $I(z) = 1/z$.

- (a) Se $z = x + iy$ e $I = u + iv$, esprimere u e v in termini di x e y .
- (b) Mostrare che le equazioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte dappertutto eccetto che nell'origine, cosicché I è analitica ovunque eccetto che nell'origine (è analitica all'infinito?).
- (c) Determinare la matrice Jacobiana e, usando coordinate polari, determinare l'effetto geometrico locale di I .
- (d) Usare $f'(z) = \partial_x f$ per mostrare che la derivata è $-1/z^2$, come nell'usuale calcolo. Utilizzare questo per confermare il risultato di (c).