

6.7 PROBLEMI

PROBLEMA 6.1. □ Usando il teorema di Cauchy (e non la formula), dimostrare direttamente che

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

dove C è una qualunque curva chiusa che circonda l'origine.

Aiuto: si proceda come nell'ultima dimostrazione della formula di Cauchy data nella sezione. 6.6.

PROBLEMA 6.2. □ Dimostrare che

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + 1} = 0$$

dove C è una qualunque curva chiusa che contenga i punti i e $-i$.

Aiuto: Dopo aver decomposto la funzione integranda in somma di fratti semplici, la si interpreti fisicamente in termini dei campi vettoriali coniugati ad essa associati. Quindi si proceda ad una verifica analitica usando la formula di Cauchy.

PROBLEMA 6.3. □ Sia J_R l'arco di raggio R centrato nell'origine e che va dal punto R al punto $-R$. Calcolare al prim'ordine in $1/R$ l'integrale

$$\int_{J_R} \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

(N.B. C non è una curva chiusa.)

PROBLEMA 6.4. □ Sia L_R il cammino da $-R$ a $-R$ sull'asse reale. Calcolare al prim'ordine in $1/R$ l'integrale

$$\int_{L_R} \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

PROBLEMA 6.5. □ Mostrare che dai due problemi precedenti risulta verificata l'uguaglianza (perlomeno al prim'ordine $1/R$)

$$\int_{C_R} \frac{dz}{z^2 + 1} = \pi.$$

dove $C_R = J_R + L_R$.

PROBLEMA 6.6. □ Si consideri

$$I_n = \oint_C \frac{dz}{z^n},$$

dove C è una qualunque curva chiusa che racchiude l'origine.

- Mostrare che per $n \geq 2$ si ha $I_n = 0$.
- Fornire una spiegazione fisica dell'annullarsi di I_2 , associando a $1/z^2$ il campo di un dipolo (si avvicinino l'una all'altra due cariche di segno opposto tenendo costante il momento di dipolo $p = qd$, dove d è il raggio vettore da una carica all'altra).
- Estendere la spiegazione fisica ad ogni $n > 2$.

Morale. Se C è una qualunque curva chiusa che racchiude il punto p (poiché l'origine non è speciale e quel che vale per cammini intorno ad essa vale per cammini intorno a qualunque altro punto), allora

- $\oint_C (z - p)^n dz = 0$ per $n = 0, 1, 2, 3 \dots$
- $\oint_C (z - p)^n dz = 2\pi i$ per $n = -1$
- $\oint_C (z - p)^n dz = 0$ per $n = -2, -3, -4 \dots$

Queste equazioni sono tutte conseguenza del teorema di Cauchy: la (1) vale perché per $n = 0, 1, 2, 3 \dots$, $(z - p)^n$ è analitica ovunque nella regione delimitata da C ; la (2) perché in p c'è una carica unitaria (caso particolare della formula di Cauchy); la (3) perché la carica totale nell'origine è zero.