

7.10 PROBLEMI

PROBLEMA 7.1. \square

Sia C la linea $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ che congiunge i punti $(1, 1)$ e $(2, 3)$. Determinare il valore di

$$\int_C (12z^2 - 4iz) dz$$

PROBLEMA 7.2. \square

Calcolare

$$\oint_C |z|^2 dz$$

lungo i cerchi (a) $|z| = 1$ e (b) $|z - 1| = 1$.PROBLEMA 7.3. \square

Calcolare

$$\int_C \bar{z}^2 dz + z^2 dz$$

lungo la curva C definita da $z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 = (2 - 2i)z + (2 + 2i)\bar{z}$ tra il punto $z = 1$ e $z = 2 + 2i$.

PROBLEMA 7.4. \square

Determinare e classificare tutte le singolarità di

- (a) $\frac{z}{(z^2 + 4)^2}$,
 (b) $\sec \frac{1}{z}$,
 (c) $\frac{\ln(z - 2)}{(z^2 + 2z + 2)^2}$,
 (d) $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$.

PROBLEMA 7.5. \square

Calcolare

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2} dz$$

dove C è il cerchio $|z| = 4$.PROBLEMA 7.6. \square

Calcolare

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz$$

dove C è il cerchio $|z| = 2$.PROBLEMA 7.7. \square

Dimostrare che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \sin t$$

per $t > 0$ e C il cerchio $|z| = 3$.PROBLEMA 7.8. \square

Calcolare

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{z^2 - 1} dz$$

lungo un rettangolo con vertici in: (a) $2 \pm i, -2 \pm i$; (b) $-i, 2 - i, 2 + i, i$.PROBLEMA 7.9. \square

Siano

$$P(z) = \frac{1}{\cos z}, \quad Q(z) = \frac{\cos z}{z^2}, \quad R(z) = \frac{1}{(e^z - 1)^3}.$$

Trovare i poli di P, Q e R e il loro ordine.

I problemi che seguono sono un training sui fondamentali per poter affrontare esercizi più difficili (inclusi alcuni dei precedenti). Procedere passo passo, l'ordine è grosso modo di difficoltà crescente. Non fare salti, le soluzioni di esercizi precedenti possono essere d'aiuto per esercizi successivi. Per comodità, vengono date le risposte in parentesi quadrate (ma non sono date le soluzioni in appendice).

PROBLEMA 7.10. Classificare le singolarità di $f(z)$ nei punti indicati.

(I) $f(z) = \cot z$ in $z = 0$.

[Polo semplice.]

(II) $f(z) = \frac{1 + \cos z}{(z - \pi)^2}$ in $z = \pi$.

[Eliminabile.]

(III) $f(z) = \sin(1/z)$ in $z = 0$.

[Singolarità essenziale.]

(IV) $f(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 + 2z + 1}$ in $z = -1$.

[Polo di ordine 2.]

(V) $f(z) = z^{-3} \sin z$ in $z = 0$.

[Polo di ordine 2.]

(VI) $f(z) = (\csc z)(\cot z)$ in $z = 0$.

[Polo di ordine 2.]

PROBLEMA 7.11. Trovare i residui di $g(z)$ nei punti indicati.

(I) $g(z) = \frac{1}{1+z^2}$ in $z = -i$.

[Res = $\frac{i}{2}$]

(II) $g(z) = \frac{e^z}{z^3}$ in $z = 0$.

[Res = $\frac{1}{2}$]

(III) $g(z) = \tan z$ in $z = \pi/2$.

[Res = -1]

(IV) $g(z) = \frac{z+2}{(z^2-2z+1)^2}$ in $z = 1$.

[Res = 0]

(V) $g(z) = f(z)/h(z)$ in $z = a$ con $f(a) \neq 0$ e $h'(a) \neq 0$. Dimostrare che $z = a$ è un polo semplice e trovare il residuo.

[Res = $f(a)/h'(a)$]

PROBLEMA 7.12. Le singolarità delle funzioni sotto sono tutte poli semplici. Determinare e usare 7.11(V) per trovare i residui in esse.

(I) $g(z) = \frac{z^2-1}{z^2-5iz-4}$.

[i e $4i$. Res₁ = $(-2/3)i$ e Res₂ = $(17/3)i$]

(II) $g(z) = \tan z$.

[$(n + \frac{1}{2})\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Res _{n} = -1]

(III) $g(z) = \frac{z^2}{z^3-8}$.

[$2, 2e^{2i\pi/3}$ e $2e^{4i\pi/3}$. Res = $1/3$]

(IV) $g(z) = \frac{e^z}{\sin z}$.

[$n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Res _{n} = $(-1)^n e^{n\pi}$]

(V) $g(z) = \frac{\sin z}{z^2-3z+2}$.

[1 e 2 . Res₁ = $-\sin 1$ e Res₂ = $\sin 2$]

PROBLEMA 7.13. \square

Usare il metodo dei residui per calcolare gli integrali seguenti. Quando possibile, potete usare i risultati degli esercizi precedenti

(I) $\oint_C \frac{z^2}{z^3-8} dz$, dove C (percorso in senso antiorario) è il cerchio di raggio 1 e centro $3/2$.

[$2\pi i/3$]

(II) $\oint_C \frac{z^2}{z^3-8} dz$, dove C (percorso in senso antiorario) è il cerchio di raggio 3 e centro 0 .

[$2\pi i$]

(III) $\oint_C \frac{z^2}{z^3-8} dz$, dove C (percorso in senso antiorario) è il cerchio di raggio 1 e centro 0 .

[πi]

(IV) $\oint_C \frac{z^2-1}{z^2-5iz-4} dz$, dove C è una qualunque curva semplice chiusa (percorsa in senso antiorario) che include i seguenti punti: (a) solo i , (b) solo $4i$, (c) sia i sia $4i$, (d) né i né $4i$.

[(a) $4\pi/3$, (b) $-34\pi/3$, (c) -10π , (d) 0]

(V) $\oint_C \frac{e^z}{\sin z} dz$, dove C (percorso in senso antiorario) è il rettangolo con vertici $-\pi/2 - i$, $5\pi/2 - i$, $-\pi/2 + 2i$ e $5\pi/2 + 2i$.

[$2\pi(1 - e^\pi + e^{2\pi})$]

(VI) $\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} dz$, dove C (percorso in senso orario) è il semicerchio nel semipiano superiore che ha centro 0 , raggio $R > 2$ e diametro collocato lungo l'asse reale.

[$-\pi/6$]