

8.8 PROBLEMI

PROBLEMA 8.1. □ Calcolare i seguenti integrali:

(I) 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} \quad [3\pi/8]$$

(II) 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(a+bx^2)^4}, \quad a, b > 0$$
  

$$[\pi/(16a^{3/2}b^{5/2})]$$

(III) 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x}, \quad 0 < a < 1$$
  

$$[\pi/[\sin(a\pi)]]$$

(IV) 
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$$
  

$$[\pi]$$

PROBLEMA 8.2. □ Calcolare i seguenti integrali:

(I) 
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$
  

$$[\pi/3]$$

(II) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a \cos x + x \sin x}{x^2 + a^2} dx$$
  

$$[2\pi e^{-a}]$$

(III) 
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta} d\theta$$
  

$$[\pi/12]$$

(IV) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx, n \in \mathbb{Z}^+, a > 0$$

(V) 
$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx$$
  

$$\left[ \frac{e^{-|\omega|\pi/2}}{1+e^{-|\omega|\pi}} \right]$$

(VI) 
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx$$
  

$$\left[ \frac{\pi}{2} \tanh \frac{a\pi}{2} \right]$$

(VII) 
$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}$$
  

$$[2\pi/\sqrt{3}]$$

PROBLEMA 8.3. □ Calcolare i seguenti integrali:

(I) 
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-3\sin t}$$
  

$$[\pi/2]$$

(II) 
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3-2\cos t}$$
  

$$[2\pi/\sqrt{5}]$$

(III) 
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t dt}{13+12\cos t}$$
  

$$[-4\pi/3]$$

(IV) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$
  

$$[\pi/6]$$

(V) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh x}$$
  

$$[\pi]$$

(VI) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2+2x+5}$$

PROBLEMA 8.4. □ Dimostrare che

(I) 
$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(II) 
$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1$$

(III)

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$$

(IV)

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} = \pi \ln 2$$

PROBLEMA 8.5. □ Calcolare

(I)

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s-2)^2} \right\}$$

$$\left[ \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t} \right]$$

(II)

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right\}$$

$$\left[ \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t) \right]$$

(III)

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} \right\}$$

$$\left[ 1 - \operatorname{erf} \left( a/2\sqrt{2} \right) \right]$$

*Il prossimo è un problema fuori programma.*

PROBLEMA 8.6. Il problema di Keplero del moto di un corpo di massa  $m$  in un campo centrale  $-k/r$  può essere risolto in termini di variabili azione-angolo. Risolvendo l'equazione di Hamilton-Jacobi in coordinate sferiche  $(r, \theta, \phi)$ , e separando le variabili, si ottiene una forma integrale delle variabili

d'azione  $J_\phi, J_\theta$  e  $J_r$ . Per la variabile d'azione radiale si trova

$$J_r = \oint p_r dr = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{(J_\theta + J_\phi)^2}{4\pi^2 r^2}} dr \quad (*)$$

dove  $E$  è l'energia, assunta negativa (stato legato), l'integrazione è su un'orbita con perielio  $r_1$  e afelio  $r_2$ . L'interesse in questo integrale sta nel fatto che se riusciamo ad esprimere l'energia  $E$  in termini delle variabili d'azione, cioè se determiniamo l'hamiltoniana  $H = E$  in funzione di  $J_\phi, J_\theta$  e  $J_r$ , possiamo determinare le frequenze del moto, sulla base dell'equazione

$$v_i = \frac{\partial H}{\partial J_i}$$

Sommerfeld, che contribuì molto allo sviluppo della "vecchia" meccanica quantistica *à la* Bohr, basata su condizioni di quantizzazione  $\oint p_i dq_i = n_i h$  per gli integrali d'azione, risolse l'integrale (\*), con i metodi dell'analisi complessa.

1. Siete in grado di fare altrettanto? (Come aiuto, si tenga presente che perielio e afelio sono punti di diramazione e che conviene prendere un taglio tra di loro e ...)
2. Fatto questo, dovrete poter verificare che c'è una sola frequenza del moto e che il periodo è dato da

$$T = \pi k \sqrt{\frac{m}{-2E^3}}$$

[Si veda il libro di Goldstein di meccanica classica.]