

9.6 PROBLEMI

PROBLEMA 9.1. \square

Dimostrare il teorema di Morera.

PROBLEMA 9.2. \square

Sia $\{f_n(z)\}$, $n=1,2,3, \dots$, una successione di funzioni analitiche nella regione \mathcal{R} . Si supponga che

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

sia uniformemente convergente in \mathcal{R} . Dimostrare che $F(z)$ è analitica in \mathcal{R} .

PROBLEMA 9.3. \square

Sia $f(z)$ analitica dentro e lungo una curva semplice chiusa C . Dimostrare che

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-nit} f(a + e^{it}) dt$$

PROBLEMA 9.4. \square

Sviluppare

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

in serie di Laurent valevole per

(a) $1 < |z| < 3$

(b) $|z| > 3$

(c) $0 < |z-1| < 2$

(d) $|z| < 1$

PROBLEMA 9.5. \square

Dimostrare che la serie

$$1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

non può essere prolungata analiticamente oltre $|z| = 1$ (il cerchio $|z| = 1$ è la barriera naturale della serie).

PROBLEMA 9.6. \square

Sia

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} t^3 e^{-zt} dt$$

(i) Dimostrare che $F_1(z)$ è analitica in tutto il semipiano destro $\operatorname{Re}(z) > 0$.

(ii) Determinate una funzione $F(z)$ che prolunga analiticamente $F_1(z)$ nel semipiano sinistro $\operatorname{Re}(z) < 0$.