

11.8 PROBLEMI

PROBLEMA 11.1. □

Dimostrare che

$$F^2 = \mathcal{I}$$

dove $\mathcal{I}f(x) = f(-x)$.

PROBLEMA 11.2. □

Dimostrare che :

- (a) f è pari se e solo se $F^2f = f$
 (b) f è dispari se e solo se $F^2f = -f$
 (c) $F^4f = f$ per ogni funzione f (su cui F è definita).
 (d) La trasformata di Fourier di una funzione reale pari è reale.
 (e) La trasformata di Fourier di una funzione reale dispari è immaginaria.
 (f) La trasformata di Fourier di una funzione pari è pari e di una funzione dispari è dispari.

PROBLEMA 11.3. □

Calcolare la trasformata di Fourier ② di

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

PROBLEMA 11.4. □

Usare la relazione di reciprocità e il problema precedente per calcolare la trasformata di Fourier ③ di

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}$$

PROBLEMA 11.5. □

Usare il problema precedente per mostrare che

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \cos x}{x} dx = \frac{\pi}{4}$$

PROBLEMA 11.6. □

Usare i due problemi precedenti per mostrare che

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} = \frac{\pi}{2}$$

PROBLEMA 11.7. □

Calcolare la trasformata di Fourier ② della funzione $f(x) = e^{-a|x|}$ dove $a > 0$.

PROBLEMA 11.8. □

Per a e x positivi, ottenere la formula

$$e^{-ax} = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos kx}{a^2 + k^2} dk.$$

PROBLEMA 11.9. □

Si consideri la funzione (generalizzata) segno

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e si stabilisca l'uguaglianza

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t} dt = \operatorname{sgn}(x)$$

PROBLEMA 11.10. □ Calcolare le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni:

(I)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(II)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{|x|}{2}\right) & \text{se } |x| < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

PROBLEMA 11.11. □ Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) Calcolare la trasformata di Fourier di $g = f \star f$.
 (b) Calcolare $f \star f$.

PROBLEMA 11.12. □ Usare il principio di reciprocità e le proprietà della trasformata di Fourier (che cosa diventano nel dominio delle frequenze operazioni come derivate, traslazione, cambiamento di scala etc.) per ricondursi ad trasformate note e calcolare le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni:

(I)

$$\frac{1}{1+x^2}$$

(II)

$$\frac{a - ix}{a^2 + x^2}$$

(III)

$$\frac{x}{1 + x^2}$$

(IV)

$$e^{-2x^2+2x}$$

(V)

$$e^{-\frac{1}{2}x^2+2}$$

(VI)

$$xe^{-x^2}$$

(VII)

$$x^2e^{-|x|}$$

(VIII)

$$xe^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$$

PROBLEMA 11.13. \square Si supponga che f sia una funzione pari assolutamente integrabile e sia $h(x) = \sin(ax)$. Dimostrare che per tutti i numeri reali a si ha

$$f \star h(x) = \sin(ax)\widehat{f}(a).$$

PROBLEMA 11.14. \square

Trovare la soluzione generale di

$$Y''(x) + Y'(x) + xY(x) = 0$$

PROBLEMA 11.15. \square

Risolvere l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)f(u)du = \frac{1}{a^2+t^2}$$

PROBLEMA 11.16. \square

Risolvere l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)f(u)du = e^{-t^2}$$

PROBLEMA 11.17. \square

Risolvere l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)f(u)du + 2f(x) = \frac{4x^2 + 10}{\pi(x^4 + 5x^2 + 4)}$$

PROBLEMA 11.18. \square

Risolvere l'equazione integrale

$$\rho(x) + \int_0^{\infty} \rho(x-y)e^{-y}dy = \frac{1}{1+x^2}$$

PROBLEMA 11.19. \square

Risolvere l'equazione mista (differenziale a alle differenze finite)

$$f'(x) + f(x) + f(x+1) = \frac{1}{1+x^2}$$