

16.9 PROBLEMI

PROBLEMA 16.1. \square Sia Θ la funzione scalino di Heaviside, $-\pi \leq x \leq \pi$,

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostrare che la serie di Fourier associata a $\Theta(x)$ è

$$\frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2\ell+1)ix}}{2\ell+1}$$

PROBLEMA 16.2. \square

Mostrare che la serie di Fourier associata a $\Theta(x)$ può essere riscritta come

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right]$$

PROBLEMA 16.3. \square

Sia $f(x) = e^{ax}$, $-\pi \leq x \leq \pi$. Mostrare che la serie di Fourier associata a $f(x)$ è

$$\frac{\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n (a + in)}{a^2 + n^2} e^{inx}$$

PROBLEMA 16.4. \square

Calcolare la serie di Fourier della funzione $\frac{1}{2}x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$, senza calcolare esplicitamente le sue coordinate di Fourier, ma sfruttando il fatto che la serie di Fourier di x è

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, \quad -\pi < x \leq \pi.$$

PROBLEMA 16.5. \square

Si consideri la formula del problema precedente per x e la si derivi rispetto a x . La derivata di x è 1 e la derivata della serie è

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos nx$$

cioè

$$2 \cos x - 2 \cos 2x + 2 \cos 3x - \cos 4x + \dots$$

che non è di certo 1: lo sviluppo di Fourier di 1 contiene un solo termine, 1 appunto (perché?). Spiegare dove si è sbagliato.