

17.12 PROBLEMI

PROBLEMA 17.1. \square

Determinare quali sei seguenti insiemi è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare e se è uno spazio vettoriale reale o complesso.

- (i) Lo spazio $\mathcal{P}_n(I)$ dei polinomi in un intervallo I della retta reale che sono: di grado minore o uguale a n , con coefficienti complessi e su \mathbb{C} (cioè sono permesse moltiplicazioni con numeri complessi).
- (ii) Lo spazio $\mathcal{P}(I)$ dei polinomi in un intervallo I della retta reale che sono: con coefficienti immaginari e su \mathbb{R} (cioè sono permesse moltiplicazioni solo con numeri reali).
- (iii) L'insieme dei numeri reali su \mathbb{C} .
- (iv) L'insieme delle funzioni a valori complessi di classe $C^p(I)$ su \mathbb{R} .

PROBLEMA 17.2. \square

Sia X uno spazio vettoriale. Dimostrare che se $\{e_n\}$ e $\{f_n\}$ sono basi di X e una di esse è finita, cioè, con un numero finito di elementi, allora anche l'altra lo è e il numero di elementi è lo stesso.

PROBLEMA 17.3. \square

Dati due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} in uno spazio con prodotto scalare, sotto quali condizioni vale l'uguaglianza $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$? Può questa uguaglianza valere anche se i vettori non sono ortogonali?

PROBLEMA 17.4. \square

Siano $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ in $L^2(-1, 1)$. Calcolare

- (a) $\langle f_1 | f_2 \rangle$
- (b) $\langle f_1 | f_3 \rangle$
- (c) $\|f_1 - f_2\|^2$
- (d) $\|2f_1 + 3f_2\|$

PROBLEMA 17.5. \square

Calcolare la proiezione di $f(x) = \cos^2 x$ su ciascuna delle funzioni $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos x$,

$f_3(x) = \cos 2x$, $-\pi \leq x \leq \pi$ (si chiede il valore numerico della proiezione, non il vettore proiettato).

PROBLEMA 17.6. \square

Dimostrare che l'insieme di funzioni $\{1, x, |x|\}$ è linearmente indipendente in $[-1, 1]$ e costruire il corrispondente sistema ortogonale. Il dato insieme è linearmente indipendente su $[0, 1]$?

PROBLEMA 17.7. \square

Determinare i valori reali di α per cui x^α è in $L^2(0, 1)$.

PROBLEMA 17.8. \square

Determinare i valori reali di α per cui x^α è in $L^2(1, \infty)$.

PROBLEMA 17.9. \square

Assumendo che l'intervallo (a, b) sia finito, dimostrare che se $f \in L^2(a, b)$ allora l'integrale $\int_a^b |f(x)| dx$ esiste. Mostrare che l'inverso è falso dando l'esempio di una funzione f tale che $|f|$ è integrabile su (a, b) , ma $f \notin L^2(a, b)$.

PROBLEMA 17.10. \square

In $L^2(-\pi, \pi)$ esprimere la funzione $\sin^3(x)$ come combinazione lineare delle funzioni del sistema trigonometrico $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$

PROBLEMA 17.11. \square

Dato $\rho(x) = e^{-x}$, dimostrare che ogni polinomio in x appartiene a $L^2_\rho(0, \infty) \equiv L^2((0, \infty), \rho dx)$, cioè lo spazio delle funzioni tali che

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 \rho(x) dx < \infty$$

PROBLEMA 17.12. \square

Determinare, se esiste, il limite in L^2 delle seguenti successioni

- (i) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, per $0 \leq x \leq 1$
- (ii) $f_n(x) = nx$, per $0 \leq x < 1/n$, $f_n(x) = 1$ per $1/n \leq x \leq 1$
- (iii) $f_n(x) = nx(1-x)^n$, per $0 \leq x \leq 1$.

PROBLEMA 17.13. \square

Determinare i coefficienti c_i nella combinazione lineare

$$c_1 + c_2 \sin \pi x + c_3 \sin 2\pi x$$

che danno la migliore approssimazione in $L^2(0,2)$ della funzione $f(x) = x$, $0 < x < 2$.

PROBLEMA 17.14. \square

Determinare i coefficienti a_i e b_i nella combinazione lineare

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$$

che danno la migliore approssimazione in $L^2(-\pi, \pi)$ di $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

PROBLEMA 17.15. \square

Si definisca una successione $\{a_n\}$ di numeri reali tali che $\sum_n a_n^2$ converge ma $\sum_n a_n$ diverge. Che tipo di convergenza può avere la serie $\sum_n a_n \cos nx$, $-\pi \leq x \leq \pi$?