

19.8 PROBLEMI

PROBLEMA 19.1. □

Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin^3 x \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right.$$

PROBLEMA 19.2. □

Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 3, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(3, t) = 0 \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2} - \sin \frac{5\pi x}{6} \end{array} \right.$$

(la condizione $\frac{\partial u}{\partial x}(3, t) = 0$ significa che nel suo estremo destro la sbarra è termicamente isolata e non c'è flusso di calore).

PROBLEMA 19.3. □ Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ u(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0 \quad 0 < y < 1 \\ u(x, 0) = 0 \quad u(x, 1) = \sin \frac{3\pi}{2} x \end{array} \right.$$

PROBLEMA 19.4. □

Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|} \end{array} \right.$$

PROBLEMA 19.5. □ Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{array} \right.$$

PROBLEMA 19.6. □ Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2} \end{array} \right.$$

PROBLEMA 19.7. □

Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{array} \right.$$

PROBLEMA 19.8. □ Si assuma che $f(x)$ abbia trasformata di Fourier (per esempio, sia buona).

Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K \frac{\partial u}{\partial x} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right.$$

Questo problema fornisce un modello del trasferimento di calore in una sbarra lunga e sottile che scambia calore con l'ambiente esterno. Questo fenomeno è chiamato *convezione* e K è una costante positiva chiamata *coefficiente di convezione*.

PROBLEMA 19.9. □ Si assuma che $f(x)$ abbia trasformata di Fourier (per esempio, sia buona).

Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right.$$

Questa equazione è nota come *equazione di Korteweg—de Vries linearizzata*.

PROBLEMA 19.10. □ *Equazione del calore con diffusività termica non costante*. Risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = at \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right.$$

Esprimere la soluzione come una convoluzione.

PROBLEMA 19.11. \square Risolvere

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = e^{-t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

PROBLEMA 19.12. \square Si risolva l'equazione del calore per una sbarra sottile infinitamente lunga di diffusività termica costante D e con distribuzione iniziale di temperatura $f(x) = T_0$ per $x > 0$ e 0 altrimenti. Si mostri che la temperatura u è data da

$$u(x, t) = \frac{T_0}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right]$$

dove

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$$

PROBLEMA 19.13. \square Equazione del calore per una sbarra semi-infinita. Risolvere

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x > 0 \\ u(0, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$