

## S.9

## S.9.1. □

Se  $\oint_C f(z)dz = 0$  indipendentemente da  $C$ , allora ne segue che

$$F(z) = \int_a^z f(z)dz$$

è indipendente dal percorso che unisce  $a$  e  $z$ , purché tale percorso si trovi tutto dentro la regione  $\mathcal{R}$  semplicemente connessa dove vale  $\oint_C f(z)dz = 0$ . Ma allora

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

Quindi  $F(z)$  è analitica e  $F'(z) = f(z)$ . Poiché se una funzione è analitica lo sono anche le sue derivate (sezione 9.2), anche  $f(z)$  è analitica, che è quello che si voleva dimostrare.

## S.9.2. □

Consideriamo  $\oint_C F(z)dz$  per una qualunque curva semplice chiusa contenuta in  $\mathcal{R}$ . Poiché la serie che definisce  $F(z)$  è uniformemente convergente possiamo scambiare la somma con l'integrale:

$$\oint_C F(z)dz = \oint_C \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_C f_n(z)dz = 0$$

perché le funzioni  $f_n$  sono analitiche. Per il teorema di Morera, concludiamo che  $F(z)$  è analitica, che è quanto si voleva dimostrare.

## S.9.3. □

Dalla (9.6) si ha

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Mediante cambiamento di variabili  $z - a = e^{it}$ , si ottiene

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-nit} f(a + e^{it}) dt$$

che è quanto si voleva dimostrare.

## S.9.4. □

(a) Scomponendo in fratti semplici,

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1/2}{z+1} - \frac{1/2}{z+3}.$$

Se  $|z| > 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1/2}{z+1} &= \frac{1}{2z} \left[ \frac{1}{1+z^{-1}} \right] = \frac{1}{2z} \left[ 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^4} + \dots \end{aligned}$$

Se  $|z| < 3$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1/2}{z+3} &= \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{1+z/3} \right] = \frac{1}{6} \left[ 1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} - \frac{z^3}{3^3} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{6} - \frac{z}{6 \times 3} + \frac{z^2}{6 \times 3^2} - \frac{z^3}{6 \times 3^3} + \dots \end{aligned}$$

La serie di Laurent richiesta è dunque

$$\dots - \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{6 \times 3} - \frac{z^2}{6 \times 3^2} + \frac{z^3}{6 \times 3^3} + \dots$$

(b) Se  $|z| > 1$ , si ha, come prima

$$\frac{1/2}{z+1} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^4} + \dots$$

Naturalmente, questa serie vale, *a fortiori*, per  $|z| > 3$ . Per l'altro  
fratto semplice, per  $z > 3$  si ha Se  $|z| > 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1/2}{z+3} &= \frac{1}{2z} \left[ \frac{1}{1+3z^{-1}} \right] = \frac{1}{2z} \left[ 1 - \frac{3}{z} + \frac{3^2}{z^2} - \frac{3^3}{z^3} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2z} - \frac{3}{2z^2} + \frac{3^2}{2z^3} - \frac{3^3}{2z^4} + \dots \end{aligned}$$

Quindi, per sottrazione delle singole serie,

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{13}{z^4} - \frac{40}{z^5} + \dots$$

(c) Sia  $z+1 = u$ . Allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)(z+3)} &= \frac{1}{u(u+2)} = \frac{1}{2u(1+u/2)} \\ &= \frac{1}{2u} \left[ 1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{8} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z+1) - \frac{1}{16}(z+1)^2 + \dots \end{aligned}$$

valevole per  $|u| < 2$ , cioè  $0 < |z+1| < 2$ .

(d) Per  $|z| < 1$ , si ha la serie di Taylor ottenuta sottraendo dalla serie di Taylor per  $(1/2)/(z+1)$  quella per  $(1/2)/(z+3)$  già ottenuta al punto (a). Il risultato è

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \frac{40}{81}z^3 + \dots$$

**S.9.5.** □ Osserviamo che

$$F(z) = 1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + z^{32} \dots = z + 1 + z^2 \left[ 1 + z^4 + z^8 + z^{16} \dots \right].$$

Allora

$$\begin{aligned} F(z) &= z + F(z^2) \\ F(z) &= z + z^2 + F(z^4) \\ F(z) &= z + z^2 + z^4 + F(z^8) \\ &\dots = \dots \end{aligned}$$

Da queste relazioni risulta che i valori di  $z$  tali che  $z = 1, z^2 = 1, z^4 = 1, \dots$  sono tutti singolarità di  $F(z)$  in quanto  $F(1) = \infty$ . Ma queste singolarità riempiono densamente il cerchio unitario  $|z| = 1$  e impediscono il prolungamento analitico oltre di esso della funzione.

**S.9.6.**  $\square$

(i) Integrando per parti (trasformata di Laplace), si ottiene

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} t^3 e^{-zt} dt = \frac{6}{z^4} \quad \text{se } \operatorname{Re}(z) > 0$$

(ii) La funzione  $F_2(z) = 6/z^4$  è analitica ovunque eccetto in  $z = 0$  e coincide con  $F_1(z)$  per  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . Quindi è il prolungamento analitico di  $F_1$ .

## S.11

S.11.1. □ Usiamo la convenzione ③

$$Ff(k) = \widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

$$F^{-1}\widehat{f}(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx} dk$$

Allora

$$Ff(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iyx} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)e^{iy(-x)} dy$$

$$= F^{-1}f(-x)$$

Quindi

$$F^2f = FF^{-1}f(-x) = f(-x)$$

S.11.2. □

(a)  $f$  pari significa  $f(-x) = f(x)$ . Se  $f$  è pari allora  $F^2f = f(-x) = f(x)$ . Se  $F^2f(x) = f(x)$  allora  $f(x) = f(-x)$ .

(b)  $f$  dispari significa  $f(-x) = -f(x)$ . Come prima,  $F^2f(x) = -f(x)$ .

(c)  $f = f_P + f_D$  (qualunque funzione è decomponibile nella somma di una funzione pari e una dispari). Allora

$$F^4f = F^4(f_P + f_D) = F^2(F^2f_P + F^2f_D) = F^2(f_P - f_D) = f_P + f_D = f$$

(d)

$$\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}e^{ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

(e)

$$\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}e^{ikx} dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{ikx} dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

(f)

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx \\
&= \widehat{f}(-k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-ikx} dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx \\
&= -\widehat{f}(-k)
\end{aligned}$$

S.11.3. □

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 e^{-ix} dx = \left. \frac{e^{-ix}}{-ik} \right|_{-1}^1 = \frac{e^{ik} - e^{-ik}}{ik} = 2 \frac{\sin k}{k}$$

da cui ③

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \frac{\sin k}{k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k}{k}$$

S.11.4. □

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \xrightarrow{F} \quad \widehat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ak}{k}$$

allora, per la relazione di reciprocità,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x} \quad \xrightarrow{F} \quad \widehat{f}(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } |k| < a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

S.11.5. □  $k = 1$  è una discontinuità: regola dell' $1/2$  della somma di limite destro e sinistro.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x} (\cos kx + i \sin kx) dx \Big|_{k=1} &= \frac{1+0}{2} \\
\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx &= \frac{1}{2} \\
\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

S.11.6. □ Si usi integrazione per parti e esercizio precedente.

S.11.7. □ Già svolto con il calcolo dei residui:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} = \frac{2a}{a^2 + k^2}$$

S.11.8. □ Dall'esercizio precedente segue che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + k^2} e^{ikx} dk = e^{-a|x|}$$

ovvero

$$e^{-ax} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{a^2 + k^2} dk, \quad x > 0$$

che è quanto si chiedeva di dimostrare.

S.11.9. □

In primo luogo si osservi che

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin k}{k} dk = \frac{\pi}{2}.$$

Questo integrale può essere calcolato con i metodi dell'analisi complessa oppure essere ottenuto come conseguenza del fatto che

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k}{k} e^{ikx} dk = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ponendo  $x = 0$  si ottiene

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin k}{k} dk = 1$$

da cui segue il risultato desiderato. Adesso si effettui nell'integrale il cambiamento di variabili  $xt = u$  e si osservi che, per  $x > 0$ ,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = 1$$

e per  $x < 0$ ,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t} dt = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = -1$$

che è quanto si voleva dimostrare.

S.11.10. □

(I) ③

$$\hat{f}(k) = \frac{1 - ik}{\sqrt{(2)(1 + k^2)}}$$

(II) ③

$$\hat{f}(k) = \frac{2 \sin^2 k}{\pi \sqrt{(2)}} k^2$$

S.11.11. □

(a) ③

$$\hat{f}(k) = \frac{2 \sin^2 k}{\pi \sqrt{2}} k^2$$

(b) Vedere esercizio precedente.

S.11.12. □

(I) Esercizio svolto col metodo dei residui (da ricordare a memoria):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|k|}$$

Dunque, con la convenzione ③

$$\hat{f}(k) = F\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$$

(II)

$$g(x) = \frac{a-ix}{a^2+x^2} = \frac{a-ix}{(a+ix)(a-ix)} = \frac{1}{a+ix} = \frac{-i}{x-ia}$$

$$F\left(\frac{1}{a+ix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-ie^{-ikx}}{x-ia} dx$$

Metodo dei residui: polo semplice in  $x = ia$ . Per  $k > 0$ , chiusura nel semipiano inferiore,

$$F\left(\frac{-i}{x-ia}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

Per  $k < 0$ , chiusura nel semipiano superiore,

$$\hat{g}(k) = F\left(\frac{-i}{x-ia}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2\pi i)(-i)e^{ak} = \sqrt{2\pi} e^{ak}$$

Quindi

$$\frac{a-ix}{a^2+x^2} \xrightarrow{F} \begin{cases} \sqrt{2\pi} e^{ak} & \text{se } k < 0 \\ 0 & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

Per  $k = 0$ , regola dell'1/2:

$$\hat{g}(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(III)

(IV) Integrale di Fourier della gaussiana (da ricordare a memoria):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{1}{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

Completare i quadrati

$$e^{-2x^2+2x} = e^{-2(x^2+x+\frac{1}{4})+\frac{1}{2}} = e^{-2(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}$$

e usare la proprietà di traslazione della trasformata di Fourier.

(V) Simile.

(VI) Si derivi membro a membro rispetto a  $k$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-\frac{k^2}{4}}$$

Allora

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( -\frac{2k}{4} \right) e^{-\frac{k^2}{4}},$$

da cui

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \frac{-i}{2\sqrt{2}} k e^{-\frac{k^2}{4}}$$

(VII) Come nell'esercizio precedente, usando

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} dx = \frac{2a}{a^2 + k^2}$$

(VIII)

$$(1 - ik) e^{-\frac{k^2}{2-ik}}$$

**S.11.13.** □

Con la convenzione ③, risulta comodo definire il prodotto di convoluzione nel come

$$f \star g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) du$$

(l'esercizio è inteso con questa convenzione).

$$\begin{aligned} f \star g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin(ax - au) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{e^{i(ax-au)} - e^{-i(ax-au)}}{2i} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2i} \left[ e^{iax} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iau} du - e^{-iax} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iau} du \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2i} \left[ e^{iax} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iau} du - e^{-iax} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iau} du \right] \quad (f \text{ è pari}) \\ &= \sin ax \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iau} du \end{aligned}$$

**S.11.14.** □ Richiamiamo il dizionario di traduzione:

$$\begin{aligned}
 Y(x) &\longrightarrow \widehat{Y}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x) e^{-ikx} dx \\
 \frac{d}{dx} Y(x) &\longrightarrow ik\widehat{Y}(k) && (D \rightarrow iQ) \\
 \frac{d^2}{dx^2} Y(x) &\longrightarrow -k^2\widehat{Y}(k) && (D^2 \rightarrow -Q^2) \\
 xY(x) &\longrightarrow i\frac{d}{dk}\widehat{Y}(k) && (Q \rightarrow iD) \\
 \widehat{Y}(k) &\longrightarrow Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{Y}(k) e^{ikx} dk
 \end{aligned}$$

Dunque

$$Y''(x) + Y'(x) + xY(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad -k^2\widehat{Y} + ik\widehat{Y} + i\frac{d}{dk}\widehat{Y} = 0$$

Occorre quindi risolvere la ODE

$$\frac{d\widehat{Y}}{dk} = -(ik^2 + k)\widehat{Y}$$

Questa equazione è del prim'ordine e le variabili sono separabili, per cui

$$\int \frac{d\widehat{Y}}{\widehat{Y}} = - \int (ik^2 + k) dk$$

e

$$\log \widehat{Y} = -i\frac{k^3}{3} - \frac{k^2}{2} + \log C$$

e

$$\widehat{Y}(k) = Ce^{-i(k^3/3) - (k^2/2)}$$

da cui

$$Y(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-i(k^3/3) - (k^2/2)} dk$$

Possiamo esprimere questa risposta in termini di quantità reali usando la formula di Eulero per l'esponenziale complesso e ponendo per brevità  $A = C\sqrt{2/\pi}$ . Dopo aver osservato che l'integrale con il seno si annulla (perchè?) si arriva a

$$Y(x) = A \int_0^{\infty} \cos\left(kx - \frac{k^3}{3}\right) e^{-k^2/2} dk.$$

Era stata chiesta la soluzione generale dell'equazione. Poiché l'equazione differenziale è del secondo ordine, la soluzione deve dipendere da due costanti arbitrarie, ma noi ne abbiamo trovato una sola. Evidentemente, il metodo della trasformata di Fourier non permette di vedere una soluzione. In effetti le cose stanno proprio

così: esiste un'altra soluzione, linearmente indipendente da quella trovata, che non ha trasformata di Fourier. Passando alle trasformate di Fourier, abbiamo perso questa soluzione.

Dopo aver studiato la trasformata di Laplace si ritorni a questo problema e lo si risolva usando il metodo della trasformata di Laplace. Si stabilisca se in questo modo si trova la soluzione mancante.

**S.11.15.** □ Passando alla trasformata di Fourier,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)f(u)du = \frac{1}{a+x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k)^2 = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a|k|}$$

Quindi

$$\widehat{f}(k) = \pm \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-a|k|/2}$$

Poiché

$$e^{-A|k|} \implies \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A}{A^2+x^2}$$

si avrà che

$$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-a|k|/2} \implies \pm \frac{1}{\sqrt{2a}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a/2}{(a/2)^2+x^2} = \pm \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{2a}{a^2+4x^2} = f(x)$$

**S.11.16.** □

Analogo al precedente.

**S.11.17.** □ Analogamente agli esercizi precedenti, si perviene ad un'equazione algebrica nello spazio delle trasformate di Fourier:

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k)^2 + 2\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$$

dove  $\widehat{g}(k)$  è la trasformata di Fourier di

$$g(x) = \frac{4x^2 + 10}{\pi(x^4 + 5x^2 + 4)}$$

Risolviamo l'equazione algebrica

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k)^2 + 2\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k) = 0.$$

Si ha

$$\widehat{f}(k) = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\sqrt{2\pi}\widehat{g}(k)}}{2\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -1 \pm \sqrt{1 + \sqrt{2\pi}\widehat{g}(k)} \right]$$

Calcoliamo

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^2 + 10}{\pi(x^4 + 5x^2 + 4)} e^{-ikx} dx$$

usando il metodo dei residui.

L'integrale

$$I = \frac{1}{\pi} \oint \frac{4z^2 + 10}{(z^4 + 5z^2 + 4)} e^{-ikz} dz$$

soddisfa le condizioni del lemma di Jordan. Chiudiamo nel semipiano inferiore  $\Pi^-$ , per  $k > 0$ , e nel semipiano superiore  $\Pi^+$ , per  $k < 0$ . La funzione integranda ha 4 poli semplici in  $a = \pm i$  e  $a = \pm 2i$ , infatti

$$\frac{4z^2 + 10}{(z^4 + 5z^2 + 4)} = \frac{4z^2 + 10}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} = \frac{4z^2 + 10}{(z + i)(z - i)(z + 2i)(z - 2i)}$$

Il calcolo risulta più veloce se ricordiamo l'esercizio 11 degli esercizi di riepilogo dopo la lezione 10:

$$\text{Res}(a) = \left. \frac{f(z)}{h'(z)} \right|_{z=a} = \left. \frac{(4z^2 + 10)e^{-ikz}}{4z^3 + 10z} \right|_{z=a} = \left. \frac{e^{-ikz}}{z} \right|_{z=a} = \frac{e^{-ika}}{a}$$

Allora, per  $k > 0$  (ricordarsi che la chiusura di sotto cambia il verso antiorario in orario) si ha

$$I = -\frac{1}{\pi}(2\pi i) \left[ \frac{e^{-ik(-i)}}{-i} + \frac{e^{-ik(-2i)}}{-2i} \right] = 2e^{-k} + e^{-2k}$$

e per  $k < 0$ ,

$$I = \frac{1}{\pi}(2\pi i) \left[ \frac{e^{-ik(i)}}{i} + \frac{e^{-ik(2i)}}{2i} \right] = 2e^k + e^{2k}$$

Ne segue che

$$I = 2e^{-|k|} + e^{-2|k|}$$

da cui

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2e^{-|k|} + e^{-2|k|})$$

Sostituiamo in  $\widehat{f}(k)$ :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -1 \pm \sqrt{1 + \sqrt{2\pi}\widehat{g}(k)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -1 \pm \sqrt{1 + (2e^{-|k|} + e^{-2|k|})} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -1 \pm \sqrt{(1 + e^{-|k|})^2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -1 \pm (1 + e^{-|k|}) \right] \end{aligned}$$

Otteniamo così due soluzioni dell'equazione:

$$\begin{aligned}\widehat{f}_1(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-|k|} \\ \widehat{f}_2(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-2 - e^{-|k|})\end{aligned}$$

La soluzione 2 tuttavia non è accettabile perché non tende a zero quando  $k \rightarrow \infty$  e quindi l'anti-trasformata di  $\widehat{f}_2(k)$  non è definita come una funzione ordinaria (lo sarebbe, eventualmente, nel senso delle funzioni generalizzate).

In conclusione, la sola soluzione accettabile dell'equazione integrale corrisponde a  $\widehat{f}_1(k)$ . Poiché

$$e^{-|k|} \implies \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2}$$

la soluzione cercata è

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$$

**S.11.18.**  $\square$

L'integrale in

$$\rho(x) + \int_0^{\infty} \rho(x-y)e^{-y} dy = \frac{1}{1+x^2}$$

non appare come una convoluzione perché è solo da 0 a  $+\infty$  invece di essere da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Tuttavia possiamo sostituire il limite inferiore di integrazione con  $-\infty$  se sostituiamo  $e^{-y}$  con una funzione  $g(t)$  che è uguale a  $e^{-y}$  quando  $y$  è positiva e è zero quando  $y$  è negativa. Con questa sostituzione

$$\rho(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x-y)g(y)dy = \frac{1}{1+x^2}$$

Passando alla trasformata di Fourier

$$\begin{aligned}\rho(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x-y)g(y)dy &= \frac{1}{1+x^2} \\ \Downarrow \\ \widehat{\rho}(k) + \sqrt{2\pi}\widehat{\rho}(k)\widehat{g}(k) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|k|}\end{aligned}$$

L'equazione è facilmente risolta se calcoliamo  $\widehat{g}$ :

$$\begin{aligned}\widehat{g}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iky} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y} e^{-iky} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y(1+ik)} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+ik}\end{aligned}$$

Quindi

$$\left[1 + \frac{1}{1+ik}\right] \hat{\rho}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$$

da cui

$$\hat{\rho}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+ik}{2+ik}\right) e^{-|k|}$$

Trasformando indietro

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1+ik}{2+ik}\right) e^{-|k|} e^{ikx} dk \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\cos xk + \cos(xk-k) + k \sin xk}{2 + 2 \cos k + 2k \sin k + k^2} dk \end{aligned}$$

**S.11.19.** □

Trasformiamo l'equazione secondo Fourier:

$$f'(x) + f(x) + f(x+1) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\downarrow$$

$$\left[ik + 1 + e^{-ik}\right] \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$$

da cui

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|k|}}{(ik + 1 + e^{-ik})}$$

e quindi  $f(x) \dots$

## S.14

S.14.1. □

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

1.

$$\frac{2a^2}{s^3} + \frac{2ab}{s^2} + \frac{b^2}{s}$$

2.

$$\frac{s}{s^2 - 1}$$

3.

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right)$$

4.

$$\frac{1}{s^2 + 4}$$

5.

$$\frac{2s}{(s^2 - 1)^2}$$

6.

$$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

S.14.2. □

1.

$$ae^{-bt}$$

2.

$$2 \cosh 3x - \frac{5}{3} \sinh 3x$$

3.

$$\frac{1}{2} (1 - e^{-2t})$$

4.

$$\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

5.

$$\Theta(x - 3) + \Theta(x - 1)$$

dove  $\Theta$  è la funzione di Heaviside.

6.

$$\frac{1}{t} (e^{-bt} - e^{-at})$$

**S.14.3.** □

Il lato sinistro dell'equazione è la convoluzione di  $t^3$  e  $Y(t)$ . Applicando la trasformata di Laplace ad ambo i membri dell'equazione, a primo membro si ha il prodotto delle trasformate e l'equazione diventa

$$\tilde{Y}(s) \frac{3!}{s^4} = \tilde{f}(s) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{Y}(s) = \frac{1}{6} s^4 \tilde{f}(s)$$

La moltiplicazione per  $s^4$  è associata ad una derivata quarta rispetto al tempo. Infatti, sappiamo che se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$  allora

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\tilde{f}(s) - f(0)$$

da cui

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\tilde{f}(s) - f'(0) = s(s\tilde{f}(s) - f(0)) - f'(0) = s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - f'(0)$$

che è la regola per la derivata seconda. Nello stesso modo si ottiene

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3\tilde{f}(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(4)}(t)\} = s^4\tilde{f}(s) - s^3f(0) - s^2f'(0) - sf''(0) - f'''(0)$$

⋮

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\tilde{f}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Ritornando al nostro problema, abbiamo dunque

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{6} s^4 \tilde{f}(s) = \frac{1}{6} \left[ \mathcal{L}\{f^{(4)}(t)\} + s^3f(0) + s^2f'(0) + sf''(0) + f'''(0) \right]$$

Notiamo che dall'equazione

$$\int_0^t (t-u)^3 Y(u) du = f(t)$$

segue che  $f^{(n)}(0) = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Quindi,

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{6} \mathcal{L}\{f^{(4)}(t)\}$$

ovvero

$$Y(t) = \frac{1}{6} f^{(4)}(t)$$

Il metodo funziona se  $f$  è derivabile fino al quarto ordine, che è dunque la condizione richiesta.

**S.14.4.** □ Questo problema può essere risolto in maniera analoga a come è stato risolto il problema di conduzione del calore nella sezione 8.7, esempio 8.5.

Prendiamo la trasformata di Laplace rispetto al tempo di ambo i membri della

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad x > 0, \quad t > 0,$$

posto

$$\tilde{f}(s, x) \equiv \int_0^{\infty} f(x, t) e^{-st} dt,$$

e assumendo che nel corso del tempo la soluzione si mantenga limitata, si ottiene

$$s^2 \tilde{f}(x, s) - sf(x, 0) - \partial_t f(x, 0) = c^2 \tilde{f}''(x, s)$$

dove  $\tilde{f}''$  è la derivata seconda rispetto a  $x$ . Poiché le condizioni iniziali  $f(x, 0)$  e  $\partial_t f(x, 0)$  sono entrambe nulle, l'equazione per  $\tilde{f}$  diventa

$$\tilde{f}'' - \frac{s^2}{c^2} \tilde{f} = 0$$

Questa è un'equazione alle derivate ordinarie rispetto a  $x$  ( $s$  è da considerarsi un parametro), la cui soluzione generale è

$$c_1 e^{(s/c)x} + c_2 e^{-(s/c)x},$$

dove  $c_1$  e  $c_2$  sono due costanti arbitrarie tali che, per essere determinate, sono richieste due condizioni. Una condizione è che la soluzione si mantenga limitata nel tempo, il che si traduce in  $c_1 = 0$ . Allora

$$\tilde{f}(x, s) = c_2 e^{-(s/c)x}$$

L'altra condizione è che per  $x = 0$ ,  $f(0, t) = g(t) = \cos^2 t$ . Si denoti con  $\tilde{g}(s)$  la sua trasformata di Laplace. Allora

$$\tilde{f}(0, s) = c_2 = \tilde{g}(s),$$

dunque,

$$\tilde{f}(x, s) = \tilde{g}(s) e^{-(s/c)x}.$$

Per la seconda proprietà della traslazione della sezione 14.3: se  $\mathcal{L}\{\tilde{g}(s)\} = g(t)$  allora

$$\mathcal{L}\{e^{-as} \tilde{g}(s)\} = \begin{cases} g(t-a) & \text{se } t > a \\ 0 & \text{se } t < a \end{cases}.$$

Ne segue che

$$f(x, t) = \begin{cases} \cos^2(t - \frac{x}{c}) & \text{se } t > x/c \\ 0 & \text{se } 0 < t < x/c \end{cases}$$

vale a dire,

$$u(x, t) = \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right) \cos^2\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

dove  $\Theta$  è la funzione di Heaveside.

Fisicamente, questo significa che un punto  $x$  della corda resta in quiete fino all'istante  $t = x/c$  e, a partire da questo istante, compie uno spostamento identico a quello dell'estremità  $x = 0$ , ma in ritardo

di un intervallo di tempo uguale a  $x/c$ . La costante  $c$  è la velocità a cui viaggia l'onda. Questo comportamento è in completo accordo con la propagazione causale delle onde che abbiamo messo in evidenza nel capitolo 12.

S.16

S.16.1. □

Si ha

$$\widehat{\Theta}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Theta(x) e^{-inx} dx = \int_0^1 e^{-inx} dx = \begin{cases} 1/2 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ 1/(in\pi) & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

S.16.2. □ Elementare, dall'esercizio precedente.

S.16.3. □

Si ha

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-in)x} dx \\ &= \frac{e^{(a-in)x}}{2\pi(a-in)} \Big|_{x=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{e^{(a-in)\pi} - e^{-(a-in)\pi}}{2\pi(a-in)} \\ &= (-1)^n \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{2\pi(a-in)} \\ &= \frac{(-1)^n (a+in) \sinh a\pi}{\pi(a^2+n^2)} \end{aligned}$$

S.16.4. □

Integrando membro a membro la serie di Fourier di  $x$ , si ottiene

$$\frac{1}{2}x^2 \sim -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx + \text{costante}$$

La costante è determinata dall'essere (sempre) la media della funzione

$$\text{costante} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{\pi^2}{6}$$

S.16.5. □

La serie di Fourier

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

non converge a  $x$ , piuttosto alla sua estensione periodica  $\tilde{f}(x)$ , che ha una discontinuità a salto nei multipli dispari di  $\pi$ . Per essere derivabile, la funzione deve essere almeno continua. Se poi ha derivata prima continua è di certo derivabile.

NOTA. Si può tuttavia assegnare un'interpretazione alla serie derivata. Si può dimostrare che  $\tilde{f}'(x)$  non è uguale alla funzione 1, ma una funzione delta concentrata ad ogni discontinuità di salto:

$$\tilde{f}'(x) = 1 - 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[x - (2n+1)\pi]$$

## S.17

S.17.1. □

Risposte:

1. Spazio vettoriale complesso.
2. Spazio vettoriale reale.
3. Non è uno spazio vettoriale.
4. Spazio vettoriale reale.

S.17.2. □

Assumere che i numeri sono differenti e mostrare che questo porta ad una contraddizione. La parola chiave è “linearmente indipendenti”.

S.17.3. □

Usare l'uguaglianza  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$ . Si consideri  $\mathbf{u} = (1, 1)$  e  $\mathbf{v} = (i, i)$ .

## S.18

S.18.1. □

Risposte:

1. 0.
2. 2/3.
3. 8/3
4.  $\sqrt{14}$

S.18.2. □

La proiezione ortogonale del vettore  $f$  lungo  $f_i$  è il vettore

$$\frac{|f_i\rangle\langle f_i|}{\langle f_i|f_i\rangle}|f\rangle = |f_i\rangle\frac{\langle f_i|f\rangle}{\|f_i\|^2} = \frac{|f_i\rangle}{\|f_i\|}\frac{\langle f_i|f\rangle}{\|f_i\|}$$

e valore numerico della proiezione è

$$c_i = \frac{\langle f_i|f\rangle}{\|f_i\|}.$$

Si ha  $c_1 = \sqrt{\pi/2}$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = \sqrt{\pi/2}$ .

S.18.3. □

No, perché  $|x| = x$  su  $[0, 1]$ .

S.18.4. □

$$\alpha > -1/2$$

S.18.5. □

$$\alpha < -1/2$$

S.18.6. □

Usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  in  $(0, 1]$ S.18.7. □ Talla trigonometria elementare:  $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$ S.18.8. □ Usare il fatto che per ogni polinomio  $P$ ,  $P(x)e^{-x} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \infty$ .

S.18.9. □ Risposte:

(i) 1

(ii) 1

(iii) 0

S.18.10. □ Risposta:  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -2/\pi$ ,  $c_3 = -1/\pi$ .S.18.11. □ Risposta:  $a_0 = \pi/2$ ,  $a_1 = 4/\pi$ ,  $a_2 = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ .S.18.12. □  $a_n = 1/n$ . Convergenza  $L^2$ .

## S.19

S.19.1. □ Il PC è

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin^3 x \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right.$$

1° METODO. Risolviamo il problema per separazione delle variabili  $u = X(x)T(t)$ . Allora

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ T' + \lambda^2 T = 0 \end{array} \right.$$

le cui soluzioni è

$$u_\lambda(x, t) = (a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 t}.$$

La condizione al contorno  $u(0, t) = 0$  per tutti i  $t \geq 0$  implica

$$u_\lambda(0, t) = a_\lambda e^{-\lambda^2 t} = 0 \quad \text{per tutti i } t \geq 0$$

quindi  $a_\lambda = 0$ . La condizione al contorno  $u(\pi, t) = 0$  per tutti i  $t \geq 0$  implica

$$u_\lambda(\pi, t) = b_\lambda \sin(\lambda \pi) e^{-\lambda^2 t} = 0 \quad \text{per tutti i } t \geq 0$$

che ha soluzione non banale per

$$\sin(\lambda \pi) = 0$$

$$\lambda = \lambda_n = n; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Sono dunque soluzioni indipendenti dell'equazione:

$$u_n(x, t) = b_n \sin(nx) e^{-n^2 t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e la soluzione generale è una sovrapposizione di queste. Guardiamo il dato iniziale: dalla trigonometria elementare (problema 18.7):  $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$ . Dunque nel dato iniziale ci sono solo i modi  $n = 1$  con peso  $3/4$  e il modo  $n = 3$  con peso  $-1/4$ . Quindi la soluzione del problema al contorno è

$$u(x, t) = \frac{3}{4} e^{-t} \sin x - \frac{1}{4} e^{-9t} \sin 3x$$

2° METODO. È un problema di Dirichlet su un intervallo limitato che può essere risolto per estensione dispari a  $[-\pi, 0]$  del dato iniziale. La soluzione è quindi della forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin nx,$$

che, inserita nell'equazione  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  fornisce

$$\frac{db_n}{dt} = -n^2 b_n(t),$$

da cui

$$b_n(t) = b_n(0)e^{-n^2 t}.$$

Poiché  $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$ , i coefficienti  $b_n(0)$  sono tutti nulli eccetto  $b_1$  e  $b_3$ . Quindi

$$u(x, t) = \frac{3}{4} e^{-t} \sin x - \frac{1}{4} e^{-9t} \sin 3x$$

3° METODO. Questo metodo è per chi non ha seguito le lezioni di teoria sui problemi al contorno, ma ha dimestichezza con il metodo della trasformata di Laplace per risolvere equazioni.

Prendiamo la trasformata di Laplace dell'equazione,

$$s\tilde{u}(s, x) - u_0(x) = \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2}$$

dove  $u_0(x) = u(x, 0)$ , e riscriviamo l'equazione ordinaria così ottenuta nella sua forma standard

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - s\tilde{u}(s, x) = -u_0(x).$$

Consideriamo  $u_0$  più generale del dato iniziale di questo problema, per stabilire le caratteristiche generali del metodo della trasformata di Laplace per problemi di Dirichlet, sia:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

La soluzione generale della precedente equazione, che è lineare e non omogenea, è la somma dell'omogenea associata e di un integrale particolare. La soluzione dell'omogenea è

$$c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x}$$

Per trovare una soluzione particolare, poniamo  $\tilde{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nx$ . Allora, sostituendo nell'equazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 - s)\beta_n \sin nx = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Quindi  $\beta_n = b_n/(s + n^2)$ . Allora una soluzione particolare è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s + n^2} b_n \sin nx$$

e la soluzione generale dell'equazione è dunque

$$\tilde{u}(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s + n^2} b_n \sin nx$$

Prendiamo la trasformata di Laplace delle condizioni al contorno che dipendono da  $t$

$$\tilde{u}(s, 0) = \int_0^{\infty} u(0, t) e^{-st} dt = 0$$

$$\tilde{u}(s, \pi) = \int_0^{\infty} u(\pi, t) e^{-st} dt = 0$$

Queste condizioni forniscono

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 e^{\sqrt{s}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{s}\pi} = 0$$

Quindi deve essere  $c_1 = 0$  e  $c_2 = 0$ . La soluzione è allora

$$\tilde{u}(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s + n^2} b_n \sin nx$$

Prendendo l'antistrasformata di Laplace (ricordando che l'antistrasformata di  $1/(s - a)$  è  $e^{at}$ ) si ottiene

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} b_n \sin nx$$

che coincide con la soluzione precedentemente trovata con gli altri metodi (tenuto conto che i coefficienti  $b_n$  sono tutti nulli eccetto  $b_1$ , che vale  $3/4$ , e  $b_3$ , che vale  $-1/4$ ).

**S.19.2.** □ Il PC è

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 3, t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(3, t) = 0 \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2} - \sin \frac{5\pi x}{6} \end{array} \right.$$

Risolviamo il problema per separazione delle variabili  $u = X(x)T(t)$ .

Come nel precedente problema, arriviamo a

$$u_{\lambda}(x, t) = (a_{\lambda} \cos \lambda x + b_{\lambda} \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 D t}.$$

Come prima, la condizione al contorno  $u(0, t) = 0$  per tutti i  $t \geq 0$  implica  $a_\lambda = 0$ . La condizione al contorno  $\partial_x u(3, t) = 0$  per tutti i  $t \geq 0$  implica

$$\partial_x u_\lambda(x, t)|_{x=3} = \lambda b_\lambda \cos(3\lambda) e^{-\lambda^2 t} = 0 \quad \text{per tutti i } t \geq 0$$

che ha soluzione non banale per

$$\cos(3\lambda) = 0$$

cioè per

$$3\lambda = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ovvero

$$\lambda = \lambda_n = (2n + 1) \frac{\pi}{6}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Sono dunque soluzioni indipendenti dell'equazione:

$$u_n(x, t) = b_n \sin(n\pi x) e^{-(2n+1)^2 \pi^2 t / 36}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e la soluzione generale è una sovrapposizione di queste. Il dato iniziale contiene solo i modi  $n = 1$  e  $n = 2$ . Quindi

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t / 4} \sin \frac{\pi x}{2} - e^{-25\pi^2 t / 36} \sin \frac{5\pi x}{6}$$

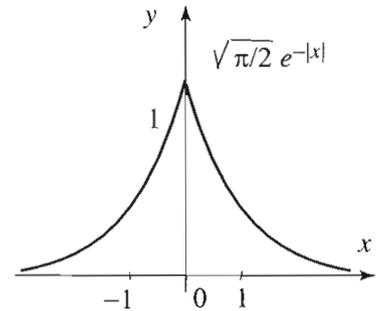
S.19.3.  $\square$

$$u(x, y) = \left( \sinh \frac{3\pi}{2} \right)^{-1} \sin \frac{3\pi}{2} x \sinh \frac{3\pi}{2} y$$

S.19.4.  $\square$

La funzione nella condizione iniziale è mostrata in figura a lato. Applichiamo alla PDE

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



il metodo di soluzione basato su trasformata di Fourier  $F$  rispetto alla variabile  $x$  (usiamo la convenzione  $\textcircled{3}$  per  $F$ ). Otteniamo, a primo membro,

$$F \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) = F \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{d}{dt} F \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = ik \frac{d}{dt} \hat{u}(k, t)$$

A secondo membro

$$F \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = -k^2 \hat{u}(k, t)$$

Dunque,

$$ik \frac{d\hat{u}(k, t)}{dt} = -k^2 \hat{u}(k, t) \quad \Rightarrow \quad \text{ODE: } \frac{d\hat{u}(k, t)}{dt} = ik \hat{u}(k, t)$$

La soluzione della ODE con dato iniziale  $\hat{u}(k, 0)$  è

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0)e^{ikt}$$

dove

$$\hat{u}(k, 0) = F\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}e^{-ikx} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-ikx} dx$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-ikx} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^x e^{-ikx} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{ikx} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x(1-ik)} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x(1+ik)} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{-1}{1-ik} e^{-x} e^{ikx} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \frac{-1}{1+ik} e^{-x} e^{-ikx} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1+ik+1-ik}{1+k^2} \right) \\ &= \frac{1}{1+k^2} \end{aligned}$$

Quindi

$$\hat{u}(k, t) = \frac{1}{1+k^2} e^{ikt}$$

Allora

$$u(x, t) = F^{-1}\left(\frac{1}{1+k^2} e^{ikt}\right).$$

Detta  $f(x)$  la  $F^{-1}$  di  $\frac{1}{1+k^2}$ , per la proprietà che una modulazione diventa una traslazione (attenzione al segno!), la soluzione sarà

$$f(x+t)$$

Ma  $f(x)$  è chiaramente  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}$ , visto che abbiamo appena mostrato che la trasformata di Fourier di questa funzione è  $1/(1+k^2)$ . Dunque, la soluzione è

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x+t|}$$

**S.19.5.**  $\square$

**METODO 1.** Ci si ricorda la soluzione generale dell'equazione delle onde in una dimensione, per cui senza fare un calcolo si scrive

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [a(x+t) + a(x-t)] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1+(x+t)^2} + \frac{1}{1+(x-t)^2} \right] \end{aligned}$$

METODO 2. Si usa il metodo della trasformata di Fourier:

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dt^2} = -k^2 \hat{u}$$

$$\hat{u}(k, t) = A(k) \cos(kt) + B(k) \sin kt$$

dato iniziale implica  $B = 0$  e

$$\hat{u} = \hat{u}(k, 0) \cos(kt)$$

dove

$$\hat{u}(k, 0) = F\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$$

per l'esercizio precedente (e la relazione di reciprocità).

Quindi

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos(kt) e^{ikx} dk = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} \cos(kt) e^{ikx} dk$$

Ma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} \cos(kt) e^{ikx} dk &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} e^{ik(x+t)} dk + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} e^{ik(x-t)} dk \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1+(x+t)^2} + \frac{1}{1+(x-t)^2} \right] \end{aligned}$$

S.19.6. □

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}}{dt} &= -\frac{1}{4} k^2 \hat{u} \Rightarrow \hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0) e^{-k^2 t/4} \\ \hat{u}(k, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\pi} e^{-k^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4} \\ \hat{u}(k, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4} e^{-k^2 t/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2(1+t)/4} \end{aligned}$$

Dunque,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2(1+t)/4} e^{ikx} dk \quad (a = (1+t)/4) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{(1+t)/4}} e^{-x^2/[4(1+t)/4]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1+t}} e^{-\frac{x^2}{1+t}} \end{aligned}$$

S.19.7. □ Stesso procedimento del penultimo problema. Risultato:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^1 \cos(ckt) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{\sin(x+ct)}{x+ct} + \frac{\sin(x-ct)}{x-ct} \right] \end{aligned}$$

**S.19.8.** □

Stesso procedimento degli esercizi precedenti. Risultato:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dk^2 t} e^{ik(x+Kt)} \widehat{f}(k) dk$$

**S.19.9.** □

Idem. Risultato:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iak^3 t} e^{ikx} \widehat{f}(k) dk$$

**S.19.10.** □

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} = -atk^2 \widehat{u} \quad \widehat{u}(k, 0) = \widehat{f}(k)$$

Risolvendo la ODE, si trova

$$\widehat{u}(k, t) = \widehat{f}(k) e^{-at^2 k^2 / 2}$$

$$F^{-1} \left[ e^{-at^2 k^2 / 2} \right] (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2 k^2 / 2} e^{ikx} dk = \frac{1}{t} e^{-x^2 / (2t^2)}$$

Quindi

$$u(x, t) = f \star \frac{1}{t} e^{-x^2 / (2t^2)} = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2 / (2t^2)} f(y) dy$$

(si faccia attenzione al fattore  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  della convoluzione quando si usa la convenzione ③ per  $F$ ).

**S.19.11.** □

Stesso procedimento dell'esercizio precedente. Risultato:

$$u(x, t) = f \star g_t(x)$$

dove

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1-e^{-t})}} e^{-\frac{x^2}{4(1-e^{-t})}}$$

**S.19.12.** □ Discende dalla soluzione come convoluzione del nucleo del calore con la condizione iniziale.

**S.19.13.** □

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f}_s(k) e^{-Dk^2 t} \sin(kx) dk$$

dove

$$\widehat{f}_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx \quad k > 0$$