

PROVA SCRITTA DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA 1

(8 agosto 2011)

1. Calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \sin \theta}$$

2. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx, \quad -\infty < k < \infty.$$

3. Siano p_1, p_2 e p_3 tre polinomi ortogonali ottenuti dall'insieme $\{1, x, x^2\}$ mediante il metodo di Gram-Schmidt, dove $-1 \leq x \leq 1$. Determinare i coefficienti costanti nel polinomio di secondo grado $a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x)$ che danno la migliore approssimazione in $L^2[-1, 1]$ di e^x .

4. Calcolare la serie di Fourier della funzione $\frac{1}{2}x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$, senza calcolare esplicitamente le sue coordinate di Fourier, ma sfruttando il fatto che

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

5. Risolvere il seguente problema al contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2} & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases}$$

6. Per $\text{Re}(z) > 0$, la funzione gamma è definita da

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

(a) Dimostrare la formula di ricorrenza $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

(b) Si può usare la formula di ricorrenza per prolungare analiticamente la funzione gamma nel semi-piano $\text{Re}(z) < 0$? In che modo?

(c) Dimostrare che $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

(d) Dimostrare che $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$, usando il prolungamento analitico.

7. Sia

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s-2}.$$

Determinare $f(t)$ usando la formula di inversione complessa della trasformata di Laplace.