

PROVA SCRITTA DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA 1
(11 gennaio 2011)

1. Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \cos \theta}.$$

2. Calcolare l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4}.$$

3. Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

4. Dalla teoria dello sviluppo in serie di Laurent è noto che ci sono costanti c_n tali che, per $1 < |z| < 4$,

$$\frac{1}{z^2 - 5z + 4} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Trovare c_{-10} e c_{10} con un metodo di vostra scelta.

5. Determinare il valori dei coefficienti a e b che rendono la funzione $x^2 + ax + b$ ortogonale sia a $x + 1$ sia a $x - 1$ in $L^2[0, 1]$.
6. Determinare i coefficienti a_i e b_i nella combinazione lineare

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$$

che danno la migliore approssimazione in $L^2[-\pi, \pi]$ di $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

7. Risolvere il problema al contorno per $u = u(x, t)$, funzione limitata di t ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{per } 0 < x < 3, t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(3, t) = 0 \quad \text{per } t > 0 \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2} - \sin \frac{5\pi x}{6} \end{array} \right.$$

(la condizione $\frac{\partial u}{\partial x}(3, t) = 0$ significa che nel suo estremo destro la sbarra è termicamente isolata e non c'è flusso di calore).

8. Risolvere rispetto a $Y(x)$ l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(u)Y(x-u)du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}.$$