

PROVA SCRITTA DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA 1
(17 febbraio 2012)

1. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - 2 \cos t}$$

2. Dimostrare che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \sin t$$

per $t > 0$ e C il cerchio $|z| = 3$.

3. Dimostrare che

$$\int_0^\infty \frac{\cosh ax}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{2 \cos(\pi a/2)}, \quad \text{dove } |a| < 1.$$

4. Calcolare l'anti-trasformata di Laplace di

$$\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}$$

5. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$$

in $0 < x \leq 2\pi$, estesa per periodicità a tutta la retta reale.

- (a) Trovare la serie di Fourier di f .
(b) La serie converge puntualmente alla funzione in *tutti* i punti dell'intervallo $0 < x \leq 2\pi$?
(c) Si ha il fenomeno di Gibbs?
6. Con riferimento alla funzione e alla serie di Fourier dell'esercizio precedente, si risponda alle seguenti domande:
(a) Si ha convergenza della serie alla funzione in $L^2(0, 2\pi)$?
(b) È soddisfatta l'identità di Parseval?
(c) Usare l'identità di Parseval per sommare la serie

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

7. Risolvere l'equazione per $u = u(x, t)$,

$$t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

con condizione iniziale

$$u(x, 0) = f(x),$$

dove $f(x)$ è una funzione la cui trasformata di Fourier è ben definita.