

PROVA SCRITTA DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA 1  
(18 febbraio 2011)

1. Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad |\epsilon| < 1.$$

2. Calcolare l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx, \quad 0 < a < 1.$$

3. Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1 + x} dx, \quad 0 < p < 1.$$

4. Sia  $f$  una funzione analitica nella regione  $\{z : |z| > 1\}$  e si supponga che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0.$$

Dimostrare che se  $|z| > 2$ , allora

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|Z|=2} \frac{f(Z)}{Z - z} dZ = -f(z).$$

5. Determinare i valori reali di  $\alpha$  per cui  $x^\alpha$  è in  $L^2(0, 1)$ .

6. Dimostrare che l'insieme di funzioni  $\{1, x, |x|\}$  è linearmente indipendente in  $L^2(-1, 1)$  e costruire il corrispondente sistema ortogonale. Il dato insieme è linearmente indipendente in  $L^2(0, 1)$ ?

7. Risolvere il problema al contorno per  $u = u(x, t)$ , funzione limitata di  $t$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{per } 0 < x < 3, t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(3, t) = 0 \quad \text{per } t > 0 \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2} - \sin \frac{5\pi x}{6} \end{array} \right.$$

(la condizione  $\frac{\partial u}{\partial x}(3, t) = 0$  significa che nel suo estremo destro la sbarra è termicamente isolata e non c'è flusso di calore).

8. Risolvere il problema al contorno per  $u = u(x, t)$ , funzione limitata di  $t$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \quad (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \end{array} \right.$$