

PROVA SCRITTA DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA 1
(18 luglio 2011)

1. Calcolare

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$

2. Calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta} d\theta$$

3. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x e^{-x^2/2} dx$$

[a scelta: con il metodo dei residui o con il metodo della derivazione sotto il segno di integrale]

4. Sia $D = \frac{d}{dx}$ l'operatore di derivazione. Dimostrare che

$$(e^{aD} f)(x) = f(x+a)$$

rendendo esplicite le ipotesi sulla funzione f usate nella dimostrazione.

5. Si consideri un anello infinitamente sottile di raggio unitario. Al tempo $t = 0$ metà anello (diciamo, $0 \leq \theta < \pi$) è alla temperatura $T_1 = 100^\circ\text{C}$ e l'altra metà ($\pi \leq \theta < 2\pi$) alla temperatura $T_2 = 0^\circ\text{C}$. Come evolve nel corso nel tempo la temperatura nei punti dell'anello?

6. Risolvere il problema al contorno per $\phi = \phi(x, t)$, funzione limitata di t ,

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ \phi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} . \end{cases}$$

7. Sia

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} (1+t)e^{-zt} dt$$

(a) Dimostrare che $F_1(z)$ è analitica in tutto il semipiano destro $\text{Re}(z) > 0$.

(b) Trovare una funzione che sia il prolungamento analitico di $F_1(z)$ nel semipiano sinistro $\text{Re}(z) < 0$.