

PROVA SCRITTA DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA 1
(7 giugno 2011)

1. Usare il metodo dei residui per calcolare $\oint_C \frac{z^2}{z^3 - 8} dz$, dove C è il cerchio di raggio 1 e centro $3/2$.
2. Calcolare l'integrale

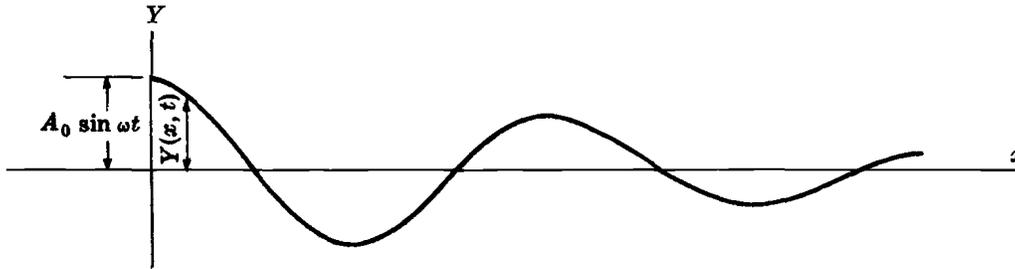
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

(a scelta: con il metodo dei residui o con il metodo della derivazione sotto il segno di integrale).

3. Sia $z = pe^{it} + qe^{-it}$, dove t è il tempo e p, q ($p > q$) sono numeri reali, l'orbita di un punto nel piano z .
 - (i) Si mostri che si tratta di un'ellisse e si determini la posizione del centro e dei fuochi.
 - (ii) Si consideri la trasformazione $z \mapsto w = z^2$. Come si trasforma l'orbita? Come si trasformano i fuochi e il centro dell'ellisse?
4. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

- (i) Determinare l'espansione in serie di Fourier (trigonometrica) di $f(x)$.
 - (ii) La serie ottenuta è uniformemente convergente? Perché?
5. Si consideri la funzione $f(x) = xe^{-x^2/2}$.
 - (i) Stabilire se f è un'autovettore della trasformata di Fourier F .
 - (ii) In caso affermativo, determinare il corrispondente autovalore.
6. Una corda di lunghezza infinita con un'estremità in $x = 0$ si trova inizialmente in posizione di riposo lungo l'asse x . L'estremità in $x = 0$ viene sottoposta ad uno spostamento trasversale periodico dato da $A_0 \sin \omega t$, $t > 0$, come mostrato nella figura sotto.



Mediante il metodo della trasformata di Laplace, determinare lo spostamento $Y = Y(x, t)$ di un generico punto $x > 0$ della corda in un generico istante $t > 0$, assunto che Y soddisfi l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$$

e che sia limitata, cioè $|Y(x, t)| < M$, dove M è una costante.

7. Sia

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} t^3 e^{-zt} dt$$

- (i) Dimostrare che $F_1(z)$ è analitica in tutto il semipiano destro $\text{Re}(z) > 0$.
 - (ii) Dimostrare che $F_1(z)$ può essere prolungata analiticamente nel semipiano sinistro $\text{Re}(z) < 0$.