

SOLUZIONI ESERCITAZIONE 1

1.1. La funzione $w = f(z) = R(r, \theta)e^{i\Phi(r, \theta)}$, dove $z = x + iy = re^{i\theta}$ è data in coordinate polari nello spazio su cui è definita (il piano z) e lo spazio in cui assume valori. Per risolvere il problema è bene procedere per gradi. Prima (1) stabiliamo le relazioni che devono valere per le derivate rispetto a θ e r per

$$f = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

e poi (2) passiamo a quelle indotte per $Re^{i\Phi}$, in quanto $u = R \cos \Phi$ e $v = R \sin \Phi$. Per quel che riguarda (1), poiché sappiamo che f è analitica, devono valere le equazioni di CauchyRiemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Per $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial v}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial v}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Applichiamo CauchyRiemann alla prime due

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \frac{\partial v}{\partial y} - r \cos \theta \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} + r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

Per confronto otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= +r \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -r \frac{\partial v}{\partial r} \end{aligned}$$

Adesso sostituiamo $u = R \cos \Phi$ e $v = R \sin \Phi$ in ambo i membri delle precedenti equazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial R \sin \Phi}{\partial \theta} &= +r \frac{\partial R \cos \Phi}{\partial r} \\ \frac{\partial R \cos \Phi}{\partial \theta} &= -r \frac{\partial R \sin \Phi}{\partial r} \end{aligned}$$

Sviluppamo le derivate

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \theta} \sin \Phi + R \cos \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= +r \left[\frac{\partial R}{\partial r} \cos \Phi - R \sin \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] \\ \frac{\partial R}{\partial \theta} \cos \Phi - R \sin \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= -r \left[\frac{\partial R}{\partial r} \sin \Phi + R \cos \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] \end{aligned}$$

Per confronto, si ottiene

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = -rR \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad \text{e} \quad R \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = r \frac{\partial R}{\partial r}$$

che sono le relazioni cercate.

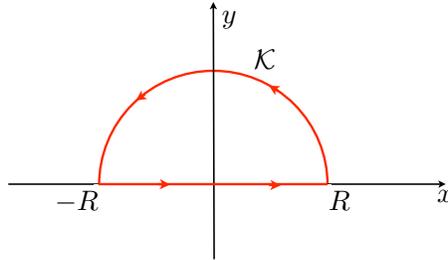
1.2. Per il calcolo dell'integrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$

si si osservi che, essendo la funzione integranda pari,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

Per il calcolo di questo integrale si considera il contorno C



Zeri di $1+x^6=0$: $e^{\pi i/6}$, $e^{3\pi i/6}$, $e^{5\pi i/6}$, $e^{7\pi i/6}$, $e^{9\pi i/6}$, $e^{11\pi i/6}$. Poli semplici di $f(z) = 1/(1+z^6)$. Solo i poli $e^{\pi i/6}$, $e^{3\pi i/6}$, $e^{5\pi i/6}$ si trovano dentro C . Usando la regola dell'Hospital si trova

$$\begin{aligned} \text{Res}(e^{\pi i/6}) &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/6}} \left[(z - e^{\pi i/6}) \frac{1}{1+z^6} \right] = \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-5\pi i/6} \\ \text{Res}(e^{3\pi i/6}) &= \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/6}} \left[(z - e^{3\pi i/6}) \frac{1}{1+z^6} \right] = \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-5\pi i/2} \\ \text{Res}(e^{5\pi i/6}) &= \lim_{z \rightarrow e^{5\pi i/6}} \left[(z - e^{5\pi i/6}) \frac{1}{1+z^6} \right] = \lim_{z \rightarrow e^{5\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-25\pi i/6} \end{aligned}$$

Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = 2\pi i \frac{1}{6} \left(e^{-5\pi i/6} + e^{-5\pi i/2} + e^{-25\pi i/6} \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Quindi,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}$$

1.3. Per verificare che l'insieme C_n delle radici n-esime dell'unità, $C_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$ è un gruppo rispetto all'operazione di moltiplicazione di numeri complessi occorre verificare che

- (1) c'è l'elemento neutro
- (2) la composizione di due elementi dell'insieme fornisce un elemento dell'insieme,
- (3) ogni membro dell'insieme ha un inverso che è anch'esso nell'insieme.

(1) 1 appartiene all'insieme in quanto $1^n = 1$ e la moltiplicazione per 1 di un elemento dell'insieme lascia invariato l'elemento stesso; (2) se x e y appartengono a C_n allora $x^n = 1$ e $y^n = 1$. Sia $w = xy$. Ma $w^n = (xy)^n = x^n y^n = 1 \cdot 1 = 1$, quindi il prodotto di due elementi è ancora un elemento dell'insieme; (3) x^{-1} è l'inverso di x ed è nell'insieme in quanto $x^{-n} = 1$ se $x^n = 1$. L'insieme delle radici n -esime dell'unità è un gruppo abeliano con n elementi ed è il gruppo ciclico di ordine n (tutti gli elementi sono generati a partire da un elemento come sue potenze).

1.4. Sia $w = f(z) = (z^2 + 1)^{1/2}$. Allora

$$w = (z + i)^{1/2}(z - i)^{1/2}$$

ha punti di diramazione in $+i$ e $-i$. Si ponga $z + i = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z - i = r_2 e^{i\theta_2}$. Allora

$$f(z) = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/2}$$

Si ha un giro completo attorno a $+i$ e $-i$ si ha per $\theta_1 + 2\pi$ e $\theta_2 + 2\pi$. Sostituendo,

$$\sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+2\pi)/2} e^{i(\theta_2+2\pi)/2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} e^{i2\pi} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/2}$$

Non c'è alcun cambiamento di ramo della funzione $f(z)$.

1.5. Per dimostrare che

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a \cos x + x \sin x}{x^2 + a^2} dx = 2\pi e^{-a}$$

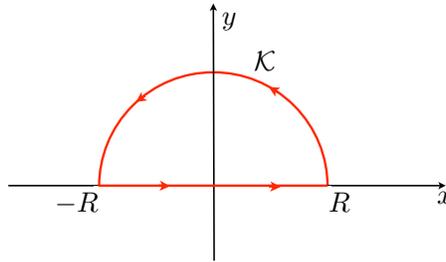
scomponiamo I nella somma di due integrali

$$I = a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx \equiv I_1 + I_2$$

Consideriamo il primo integrale

$$I_1 = a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx.$$

Non possiamo direttamente chiudere sul contorno



perché

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

diverge lungo la direzione positiva dell'asse immaginario (a causa di e^{-iz}). Consideriamo invece lungo lo stesso contorno, l'integrale

$$J_1 = \oint \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} dz = \oint \frac{\cos z}{z^2 + a^2} dz + i \oint \frac{\sin z}{z^2 + a^2} dz$$

Essendo il seno una funzione dispari, il secondo integrale dà contributo nullo quando è integrato lungo l'asse reale. Quindi $I_1 = aJ_1$, nel limite $R \rightarrow \infty$, in quanto l'integrale lungo \mathcal{K} si annulla, nel limite $R \rightarrow \infty$, come si può verificare direttamente, oppure utilizzando il Lemma di Jordan, svolto a lezione dopo l'esercitazione (per l'esercitazione era sufficiente una verifica diretta).

Calcoliamo J_1 . Polo in ia . Residuo (Hospital):

$$\frac{e^{i(ia)}}{2ia} = \frac{e^{-a}}{2ia}$$

Quindi $J_1 = (2\pi i)e^{-a}/(2ia) = \pi e^{-a}/a$, da cui

$$I_1 = aJ_1 = \pi e^{-a}$$

Per il secondo integrale possiamo procedere in modo analogo oppure osservare che

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = -\frac{d}{d\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx \Big|_{\lambda=1}$$

Ma l'integrale

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx$$

è completamente analogo a J_1 , calcolato poc'anzi e vale quindi

$$F(\lambda) = \pi \frac{e^{-\lambda a}}{a}$$

Allora

$$I_2 = -F'(\lambda) \Big|_{\lambda=1} = \pi e^{-a}$$

In conclusione

$$I = I_1 + I_2 = \pi e^{-a} + \pi e^{-a} = 2\pi e^{-a}$$

1.6. Si riprendano le note sulle trasformazioni conformi a analitiche.

1.7. Per calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$$

si procede alla sostituzione vista a lezione per integrali di questo tipo: $z = e^{i\theta}$, $dz = izd\theta$, $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$. Si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2i} \oint_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)} dz$$

Polo di ordine 3 in $z = 0$ e polo semplice in $z = 1/2$. Risultato $\pi/12$.

1.8. Verrà discusso separatamente.

1.9. Per quel che riguarda

$$I(n, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx, \quad n \text{ intero positivo}, \quad a \text{ reale positivo}$$

bastano i primi della lista, ottenuti per derivazione sotto il segno di integrale, poi si indovina facilmente lo schema

$$\begin{aligned} I(0, a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ I(1, a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1}{a}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \\ I(2, a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1}{a^2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \\ I(3, a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1}{a^3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \\ I(n, a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n a^n} \end{aligned}$$

1.10. Poiché

$$f(z) = \frac{1}{\cosh z}$$

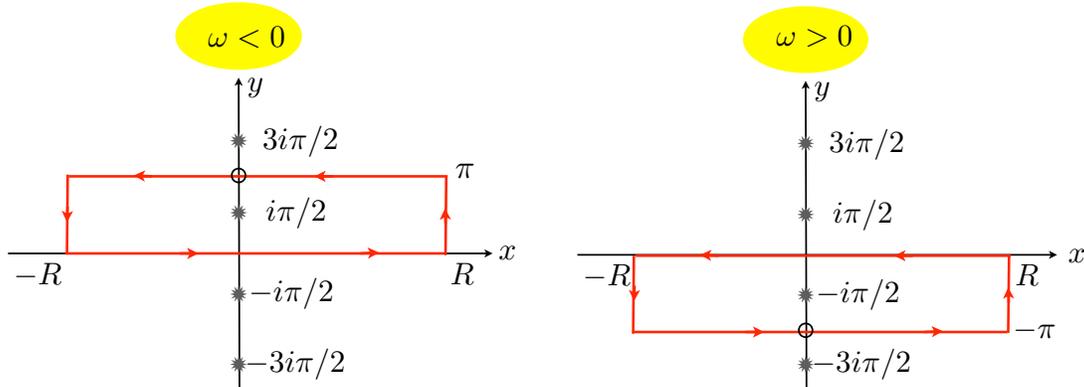
ha infiniti poli nei punti

$$z = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi i$$

per calcolare

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx$$

converrà assumere, rispettivamente per $\omega < 0$ e $\omega > 0$, i cammini di integrazione indicati in figura:



Si osservi la scelta di far passare i cammini per π e $-\pi$. Si arriva a questa scelta per tentativi ed errori, come la scelta che meglio facilita il calcolo (sfruttando la periodicità della funzione).

Il residuo della funzione integranda per $z = i\pi/2$ è $-ie^{\omega\pi/2}$ e quello per $z = -i\pi/2$ è $+ie^{-\omega\pi/2}$. Si ha quindi, per $\omega < 0$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)} dx = \frac{1}{2\pi} (2\pi i) \text{Res} = e^{\omega\pi/2}$$

Adesso sviluppiamo il primo membro

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx + \frac{e^{\omega\pi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx$$

(si osservi il cambiamento di segno $\cosh(x+i\pi) = -\cosh(x)$). Raccogliamo a secondo membro l'integrale cercato,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)} dx = (1 + e^{\omega\pi}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx$$

Si è così determinato che

$$(1 + e^{\omega\pi}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx = e^{\omega\pi/2}$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx = \frac{e^{\omega\pi/2}}{1 + e^{\omega\pi}}, \quad \omega < 0$$

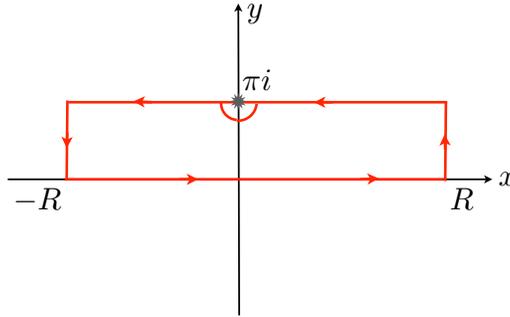
Procedendo in maniera analoga per il secondo cammino, si trova

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x} dx = \frac{e^{-\omega\pi/2}}{1 + e^{-\omega\pi}}, \quad \omega > 0$$

1.11. Vorremmo calcolare

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} = \frac{\pi}{2} \tanh \frac{a\pi}{2}$$

con un trucco simile a quello dell'esercizio precedente. Sfortunatamente, il cammino



incontra il polo $z = \pi i$. Ma questo non è un problema: basta prendere un cammino semicircolare che lo aggiri e poi far tendere a zero il suo raggio. Con il senno delle ultime lezioni possiamo evitare questo, perché adesso sappiamo che un polo lungo il cammino contribuisce con metà residuo. Il residuo della funzione nel polo è $-i \sinh a$.

Dopo aver dimostrato che i contributi verticali tendono a zero, possiamo allora integrare lungo il rettangolo e ottenere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a(x + \pi i)}{\sinh(x + \pi i)} dx = \pi \sinh a$$

$$(1 + \cosh a\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax \sinh a}{\sinh x} dx = \pi \sinh a$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx = \pi \frac{\sinh a}{1 + \cosh a\pi}$$

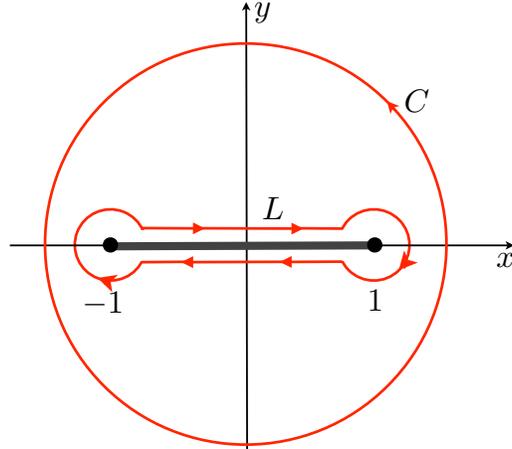
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x} dx = \frac{\pi}{2} \frac{\sinh a}{(1 + \cosh a\pi)}$$

(anche se non sembra è quello che si voleva dimostrare).

1.12. Per calcolare

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

si osservi, preliminarmente, che la funzione integranda ha punti di diramazione in -1 e 1 . Operiamo un taglio a “cappio” del tipo visto a lezione



e consideriamo l'integrale lungo il contorno $C + L$ che racchiude un dominio in cui ciascun ramo della funzione integranda è analitica. Consideriamo il ramo in cui $\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}$ è reale (visto che dobbiamo calcolare l'integrale reale del suo inverso).

Osserviamo che non ci sono residui nei punti di diramazione: questo segue dal fatto generale che

$$\oint \frac{1}{z^p} dz$$

è nullo per $p < 1$. Infatti, per un cammino circolare di raggio ϵ

$$\oint \frac{1}{z^p} dz = \int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} \epsilon^{-p} \epsilon e^{i\theta} d\theta \propto \epsilon^{1-p} \rightarrow 0 \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0$$

Quindi gli integrali lungo i piccoli cerchi sono nulli.

L'integrale da -1 a $+1$ è reale. Quello da $+1$ a -1 è eseguito sull'orlo inferiore del taglio, dove la funzione integranda ha un valore diverso che sull'orlo superiore. Più precisamente, esso deve essere uno dei tre valori possibili per

$$\sqrt[3]{\frac{1}{(1+x)^2(1-x)}}$$

Se diciamo A il suo valore reale, gli altri due sono $Ae^{2\pi i/3}$ e $Ae^{-2\pi i/3}$. Poiché passiamo dall'orlo superiore a quello inferiore con un giro in senso negativo attorno al punto di diramazione $+1$, si ha che $(1+x)^{-2/3}$ non muta, mentre $(1-x)^{-1/3}$ viene moltiplicato per $e^{2\pi i/3}$; dunque, lungo l'orlo inferiore la funzione integranda vale $Ae^{2\pi i/3}$.

Il residuo all'infinito è

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}} = (-1)^{-1/3}$$

Sull'asse reale a destra di $+1$ vale $Ae^{\pi i}$ (mezzo giro attorno a $+1$) e poiché il valore reale del limite sopra è -1 , in questo caso vale $-e^{\pi i/3}$. Si ha quindi

$$(1 - e^{2\pi i/3}) \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}} = -2\pi i e^{\pi i/3}$$

cioè

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}} = -\pi \frac{2i}{e^{-\pi i/3} + e^{\pi i/3}} = \frac{\pi}{\sin(\pi/3)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$