

- (1) Utilizzando i metodi dell'analisi complessa trovare il raggio di convergenza dello sviluppo in serie della funzione

$$H(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

nell'intorno del numero reale k , $-1 < k < 1$.

- (2) Mostrare che ciascuna delle seguenti serie ha il cerchio unitario come disco di convergenza,

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

Investigare quindi la convergenza delle serie *sul* disco $|z| = 1$

- (3) Si consideri la serie geometrica

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j$$

che converge a

$$\frac{1}{1-z}$$

dentro il disco unitario. I polinomi approssimanti in questo caso sono

$$P_m(z) = \sum_{j=0}^m z^j$$

- (a) Mostrare che l'errore $E_m(z) \equiv |P(z) - P_m(z)|$ è dato da

$$E_m(z) = \frac{|z|^{m+1}}{|1-z|}$$

- (b) Se z è un punto qualunque dentro il disco di convergenza, che cosa accade all'errore quando $m \rightarrow \infty$?
- (c) Se fissiamo m , che cosa succede all'errore quando z si avvicina al bordo $|z| = 1$?
- (d) Supponiamo di volere approssimare questa serie nel disco $|z| \leq 0.9$ e supponiamo inoltre che l'errore massimo che vogliamo tollerare è $\epsilon = 0.01$. Trovare il polinomio $P_m(z)$ di grado più basso che approssima $P(z)$ in tutto il disco con l'accuratezza desiderata.

- (4) Dimostrare che una trasformazione di Möbius

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0$$

trasforma linee e cerchi in linee e cerchi.

Aiuto: $\alpha|z|^2 + \beta(z + \bar{z}) + i\gamma(z - \bar{z}) + \delta = 0$ è l'equazione di un cerchio o di una linea in \mathbb{C} . Investigate $f(z) = \frac{1}{z}$ e scrivete

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c} \frac{1}{cz+d}.$$