

SOLUZIONI 1

(1) Procedendo come per $1/(1-x^2)$, si ottiene

$$h(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x-i)(x+i)} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{-i-x} - \frac{1}{i-x} \right]$$

Il raggio di convergenza è $R = \sqrt{1+k^2}$, la distanza del centro k alla singolarità più vicina di $h(x)$. L'esercizio finisce qui.

Forse chi ha pensato l'esercizio (che è poi chi sta scrivendo queste note) voleva che si determinasse esplicitamente lo sviluppo in serie di $h(x)$, in vista di un futuro esercizio in cui si chiederà di calcolare il raggio di convergenza con i metodi standard. Non era detto in modo chiaro, ma facciamolo comunque.

Per prima cosa si osservi che lo sviluppo in serie di $1/(a-x)$, visto nella lezione 1.2.3, si estende a $1/(a-z)$, per z complesso, cioè

$$(1) \quad \frac{1}{a-z} = \sum_j \frac{Z^j}{(a-k)^{j+1}} \quad \text{sse } |Z| < |a-k| \quad \text{e } Z \equiv z-k$$

Procedendo come per $1/(1-x^2)$, si ottiene

$$h(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{-i-z} - \frac{1}{i-z} \right]$$

Applicando (1) a entrambi i termini a secondo membro si ottiene

$$(2) \quad \frac{1}{1+z^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{(-i-k)^{j+1}} - \frac{1}{(i-k)^{j+1}} \right] Z^j$$

Siamo interessati a k e x reali:

$$(3) \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{(-i-k)^{j+1}} - \frac{1}{(i-k)^{j+1}} \right] (x-k)^j$$

Poiché k è reale, $|i-k| = \sqrt{1+k^2}$ e possiamo scrivere $i-k = \sqrt{1+k^2}e^{i\phi}$ dove $\phi = \arg(i-k)$. Similmente, essendo k reale, abbiamo $-i-k = \sqrt{1+k^2}e^{-i\phi}$. Quindi

$$(4) \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(j+1)\phi}{(\sqrt{1+k^2})^{j+1}} \right] (x-k)^j.$$

(2) (i) La serie geometrica

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge a $\frac{1}{1-z}$, quindi converge per $|z| < 1$. Sul cerchio $|z| = 1$ diverge (i termini della serie non vanno a zero).

(ii) La serie

$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

converge per $|z| < 1$. Sul cerchio $|z| = 1$, per alcuni punti converge e per altri no; ad esempio, diverge per $z = 1$ (serie armonica); converge per $z = -1$ (infatti, $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots = \ln 2$).

(iii) *La serie*

$$z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{9} + \frac{z^4}{16} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

converge assolutamente per $|z| \leq 1$ (quindi anche sul disco unitario).

(3) *Svolto nella lezione 2.1.1.*

(4) *Svolto nella lezione 2.2.1.*