

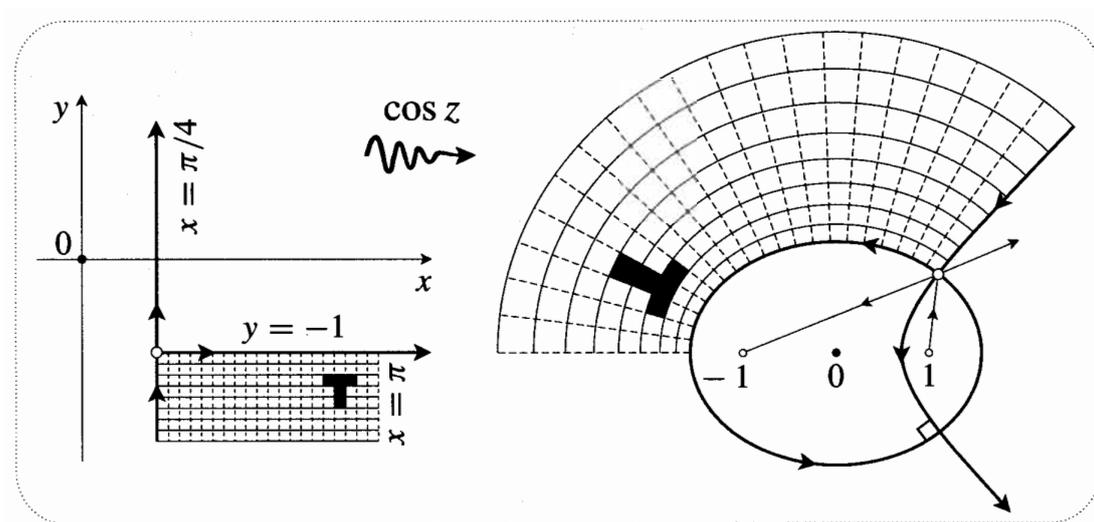
2.1

- (1) Se avete risolto l'esercizio 1(1) e ottenuto $R = \sqrt{1+k^2}$ con la regola della distanza dalla singolarità più vicina, avrete preliminarmente mostrato (utilizzando i metodi dell'algebra complessa) che

$$H(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(j+1)\phi}{(\sqrt{1+k^2})^{j+1}} \right] X^j$$

dove $X = (x - k)$ e $\phi = \tan^{-1}(-1/k)$. Mostrate adesso che il criterio del rapporto non può essere usato per determinare il raggio di convergenza della serie. Utilizzare il criterio della radice per confermare che $R = \sqrt{1+k^2}$.

- (2) Dimostrare la proposizione 2.1.2: Se due serie di potenze, centrate in zero, concordano su un segmento di curva che passa per lo zero (non importa quanto piccolo), o concordano su una successione di punti che converge a zero, sono identiche.
- (3) Nella prima lezione è stato detto che, “in un certo senso”, $h(z) = 1/(1+z^2)$ è la sola funzione complessa che concorda con la funzione reale $H(x) = 1/(1+x^2)$ sull'asse reale. Se omettiamo “in un certo senso”, è facilissimo trovare controesempi: trovatene uno. Sulla base della seconda lezione, siete in grado di trovare un senso preciso secondo cui $h(z)$ è la sola funzione che concorda con $H(x)$ sull'asse reale?
- (4) In analogia a quanto visto a lezione per l'esponenziale, si cerchi di comprendere il significato geometrico della trasformazione $z \mapsto \cos z$. Dovreste ottenere una figura di questo tipo



Riuscite a mostrare che le linee verticali e orizzontali si trasformano in parabole ed ellissi?

- (5) Le funzioni iperboliche nel piano complesso sono definite esattamente come ci si aspetta:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Si può affermare che nel piano complesso le funzioni iperboliche sono “moralmente” identiche alle funzioni trigonometriche — nello stesso senso in cui un seno è “moralmente” un coseno, in quanto ottenuto da questo traslando il piano di $-\pi/2$ nella direzione reale. Quali trasformazioni occorre fare per ottenere “cosh” da “cos” e “sinh” da “sin”?