

SOLUZIONI 2.1

(1) Si veda la soluzione di (1) del foglio 1 di esercizi, dove si mostra che

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(j+1)\phi}{(\sqrt{1+k^2})^{j+1}} \right] (x-k)^j$$

(contrariamente a quanto scritto nel testo, questa formula non era necessaria per risolvere l'es. (1) del foglio 1). Dalla formula precedente è chiaro che il metodo del rapporto non funziona perchè il limite non esiste, essendo il seno una funzione oscillante. Consideriamo il metodo della radice e per brevità si ponga $a = 1/\sqrt{1+k^2}$. Allora

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a^{n+1} |\sin(n+1)\phi|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a \sqrt[n]{a |\sin(n+1)\phi|}}, \quad \text{se il limite esiste.}$$

Ma il limite esiste in quanto $a |\sin(n+1)\phi| \leq 1$ è la radice n -esima di un numero minore o uguale a uno: la successione di queste radici tende a uno per n che tende all'infinito. Allora $R = 1/a = \sqrt{1+k^2}$.

(2) In primo luogo, occorre aver ben chiaro il teorema di identità: se

$$c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots = d_0 + d_1z + d_2z^2 + d_3z^3$$

per tutti gli z in un intorno (comunque piccolo) di 0, allora le serie di potenze sono identiche. Infatti, calcolando ambo i membri per $z = 0$ si ottiene $c_0 = d_0$, quindi possiamo cancellarli da ambo i lati. Dividendo quello che resta per z e ponendo di nuovo $z = 0$, si ottiene $c_1 = d_1$, e così via. Fatto! La dimostrazione è banale, ma il teorema è importante. Se adesso le due serie concordano non in un intorno dello zero, ma soltanto lungo un piccolo segmento di curva che passa per lo zero, prendiamo il limite per z che si avvicina a zero lungo il segmento di curva e procediamo come sopra. Troveremo di nuovo che i coefficienti devono essere uguali. Se invece di un segmento di curva, si ha una successione di punti che tende a zero, il discorso non cambia e si arriva alla stessa conclusione.

(3) Contro-esempio (tra i molti):

$$g(z) = g(x+iy) = \frac{\cos(x^2y) + i \sin(y^3)}{e^y + x^2 \ln(e+y^5)}$$

in quanto

$$g(z)|_{y=0} = \frac{1}{1+x^2}$$

In che senso

$$h(z) = 1/(1+z^2)$$

può essere considerata l'unica generalizzazione di $H(x) = 1/(1+x^2)$? Sappiamo che $h(z)$ può essere espressa come la serie di potenze

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j z^{2j}$$

e questo fatto suggerisce: $h(z)$ è la sola funzione che (i) concorda con $H(x)$ sull'asse reale e (ii) può essere espressa come una serie di potenze in z . In questo senso, sulla base dell'esercizio precedente, $h(z)$ è l'unica estensione di $H(x)$.

(4) Incominciamo col trovare l'immagine di una linea orizzontale $y = -c$ che sta sotto l'asse reale (come in figura, dove $c = -1$). Come per l'esponenziale visto a lezione, è utile pensare ad un moto da sinistra a destra con velocità costante unitaria: $z = t - ic$.

$$\cos z = \frac{1}{2}e^{iz} + \frac{1}{2}e^{-iz} = \frac{1}{2}e^c e^{it} + \frac{1}{2}e^{-c} e^{-it} = \frac{1}{2}(e^c + e^{-c}) \cos t + i \frac{1}{2}(e^c - e^{-c}) \sin t,$$

cioè

$$\cos z = u + iv = \cosh c \cos t + i \sinh c \sin t$$

Quindi il moto nel piano uv è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} u &= a \cos t \\ v &= b \sin t \end{cases}$$

dove $a = \cosh c$ e $b = \sinh c$, che è la familiare equazione di un'ellisse

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

in forma parametrica. Inoltre

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\cosh^2 c - \sinh^2 c} = 1$$

cosicché i fuochi dell'ellisse sono in $+1$ e -1 qualunque sia il valore di c : tutte le linee orizzontali del piano xy sono trasformate nel piano uv in ellissi con fuochi in $+1$ e -1 . Una linea verticale è ottenuta da una orizzontale per rotazione di $\pi/2$, cioè per $z \mapsto iz$. Ma (vedi prossimo esercizio)

$$(1) \quad \cosh z = \cos iz \quad e \quad \sinh z = -i \sin(iz),$$

quindi le linee verticali hanno equazione

$$u + iv = \cosh(ic) \cos(it) + i \sinh(ic) \sin(it) = \cos c \cosh t - i \sin c \sinh t$$

e quindi il moto nel piano uv è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} u &= a \cosh t \\ v &= b \sinh t \end{cases}$$

dove $a = \cos c$ e $b = -\sin c$, che è la familiare equazione di un'iperbole

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$$

in forma parametrica. Altri dettagli della figura possono essere ricostruiti sulla base di quanto è stato appena detto.

(5) La risposta è nell'equazione (1) dell'esercizio precedente, che si ottiene confrontando le definizioni delle funzioni trigonometriche con quelle iperboliche espresse in termini di esponenziale. L'equazione (1) mostra che "cosh" è la composizione di una rotazione di $\pi/2$, seguita da "cos"; "sinh" è la composizione di una rotazione di $\pi/2$ seguita da "sin", seguita a sua volta da una rotazione di $-\pi/2$.