

SOLUZIONI 3.1

(1) La serie binomiale è

$$B_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} z^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Con il metodo del rapporto si ottiene

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_k|}{|c_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{|n-k|} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{k}}{|1 - \frac{n}{k}|} = 1$$

(2) La multifunzione

$$f(z) = \sqrt{z+1} \sqrt[3]{z-i}$$

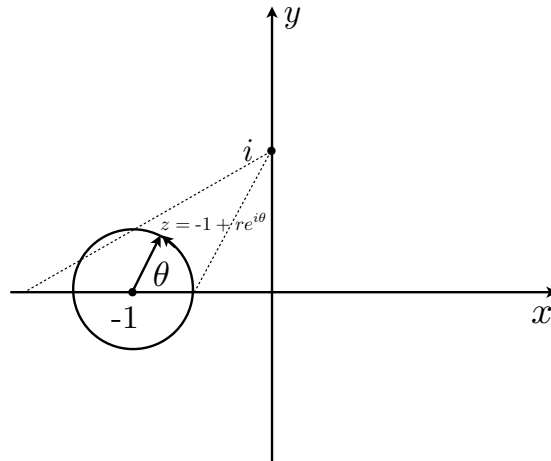
è il prodotto di 2 multifunzioni $Z \mapsto \sqrt{Z}$ e $W \mapsto \sqrt[3]{W}$. È quindi ragionevole supporre che $Z = 0$, cioè $z = -1$ e $W = 0$, cioè $z = i$ siano punti di diramazione di f . Per stabilire questo analiticamente, facciamo un giro intorno a $z = -1$ partendo dal valore principale della radice, cioè poniamo $z + 1 = re^{i\theta}$. Allora

$$f(z) = r^{1/2} e^{i\theta/2} \sqrt[3]{-1 + re^{i\theta} - i}$$

Il numero sotto radice cubica ha parte reale $-1 + r \cos \theta$ e parte immaginaria $\sin \theta - 1$. ha quindi un angolo

$$\Theta = \tan^{-1} \frac{1 - \sin \theta}{1 - r \cos \theta}$$

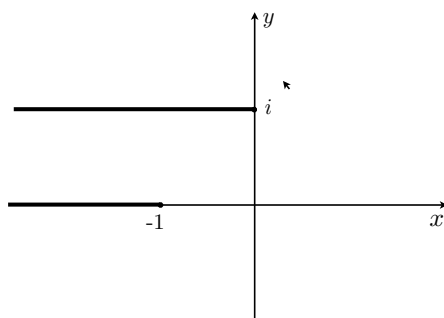
Quando θ varia tra 0 e 2π , l'angolo Θ varia tra un valore minimo e uno massimo come mostrato in figura (linee tratteggiate)



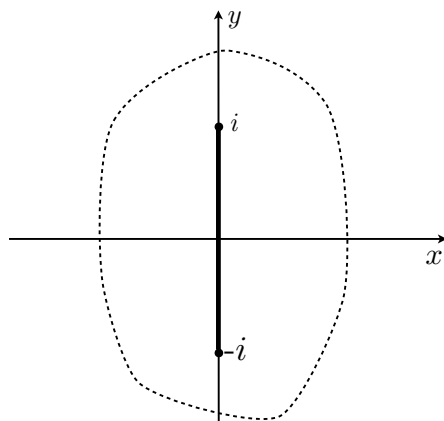
Quindi, qualunque sia il valore scelto della radice cubica per $\theta = 0$, questo non cambia dopo un giro $\theta = 0 \rightarrow \theta = 2\pi$. Ma la radice quadrata cambia: dopo un giro cambia di segno. Quindi

$$f(z) \rightarrow -f(z) \quad \text{quando } \theta = 0 \rightarrow \theta = 2\pi$$

$z = -1$ è dunque un punto di diramazione della multifunzione $f(z)$. Poiché ci vogliono due giri per tornare al valore iniziale, $z = -1$ è un punto di diramazione semplice.¹ Trattando in maniera simile un giro intorno a $z = i$, si vede facilmente che $z = i$ è un punto di diramazione di ordine 2 della funzione $f(z)$. Sulla base di quanto visto a lezione, si possono ottenere rami (cioè funzioni ad un sol valore) di $f(z)$, facendo due tagli, ad esempio le due semirette in neretto mostrate in figura



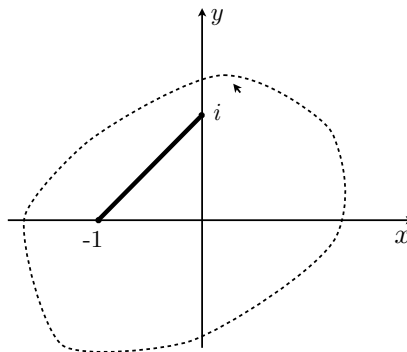
A lezione abbiamo visto che per la funzione $g(z) = \sqrt{z-i}\sqrt{z+i}$ è possibile ottenere i suoi rami con un solo taglio:



perchè in un giro completo intorno al punto di partenza i due cambiamenti di segno si compensano e la funzione ritorna al suo valore di partenza. Questo non è possibile per la funzione $f(z)$: **non**

¹Se, in prima battuta, il ragionamento che ha portato a questa conclusione non è chiaro, si introducano coordinate $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ come nella risoluzione sotto dell'esercizio 6. Alla fine ci si dovrebbe rendere conto che il ragionamento è sostanzialmente lo stesso.

è possibile un taglio del tipo

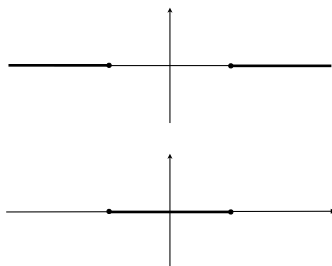


perchè essendo le “velocità angolari” opposte in senso di rotazione ma di diverso modulo (una è $1/2$ e l'altra è $1/3$), non ci può essere compensazione dopo un giro completo.

(3) $f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{z-1}\sqrt{z+1}$, al finito, ha due punti di diramazione semplici in $z = \pm 1$. Per valutare se $f(z)$ ha un punto di diramazione all'infinito, si considera $F(z) = f(1/z)$ per $z = 0$. Ma

$$F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{z^2}} \sqrt{1 - z^2} = \frac{1}{z} \sqrt{1 - z^2}.$$

Quindi $z = 0$ non è un punto di diramazione di F . Allora $z = \infty$ non è un punto di diramazione di f . Possibili tagli:



(4) (a) $f(z) = \sin \sqrt{z}$. Si consideri un giro attorno a 0 lungo il disco unitario $|z| = 1$. Allora:

$$\sin e^{i(\theta=0)/2} = \sin(1) \quad \longrightarrow \quad \sin e^{i(\theta=2\pi)/2} = \sin e^{i\pi} = \sin(-1) = -\sin(1)$$

Quindi $\sin \sqrt{z}$ ha un punto di diramazione semplice nello zero. Poichè un giro lungo $|z| = 1$ è anche un giro attorno all'infinito, anche l'infinito è un punto di diramazione della funzione.

(b) $f(z) = \sqrt{\sin z}$. Il seno si annulla per $z = n\pi$ ed è singolare all'infinito². Ci potrebbero essere dei punti di diramazione in questi punti. Consideriamo il punto $z = n\pi$. Possiamo scrivere

$$\sin z = (z - n\pi) \frac{\sin z}{z - n\pi}.$$

²Sulla base di quanto appreso nella lezione 5.1, il seno ha una *singolarità essenziale* all'infinito, in quanto è definito in termini della funzione esponenziale, e la funzione $e^{1/z}$ ha una singolarità essenziale nello zero.

Si osservi che la funzione

$$g(z) = \frac{\sin z}{z - n\pi}$$

è non nulla e ha una singolarità eliminabile in $z = n\pi$ (lezione 5.1),³

$$\lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{\sin z}{z - n\pi} = \lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{\cos z}{1} = (-1)^n$$

Allora, in un piccolo intorno di $n\pi$ si ha

$$\sin z = (z - n\pi)(-1)^n$$

Quindi, poiché $\sqrt{z - n\pi}$ ha un punto di diramazione semplice per $z = n\pi$ anche $\sqrt{\sin z}$ avrà un punto di diramazione semplice per $z = n\pi$.

Poiché tutti i punti di diramazione $z = n\pi$ vanno fino all'infinito, l'infinito non è una singolarità isolata, ma un punto di accumulazione di singolarità. Un punto di diramazione deve essere una singolarità isolata e quindi non è un punto di diramazione.

(c) $f(z) = \sqrt{z}\sqrt{\sin z}$. La funzione è a un sol valore. Dimostrazione veloce:

$$\begin{aligned} z^{1/2} \sin z^{1/2} &= \pm \sqrt{z} \sin(\pm \sqrt{z}) \\ &= \pm \sqrt{z} (\pm \sin(\sqrt{z})) \\ &= \sqrt{z} \sin \sqrt{z} \end{aligned}$$

(d) $f(z) = \sqrt{\sin z^2}$. Poiché $\sin z^2 = 0$ per $z = (n\pi)^{1/2}$, questi potrebbero essere punti di diramazione. Possiamo scrivere

$$\sin z^2 = z^2 \frac{\sin z^2}{z^2}$$

dove la funzione $\sin z^2/z^2$ è non nulla e ha una singolarità eliminabile per $z = 0$: per $z \rightarrow 0$ la funzione tende a 1. Poiché $\sqrt{z^2}$ non ha un punto di diramazione in 0, lo stesso vale per $f(z)$. Consideriamo adesso il punto $z = (n\pi)^{1/2}$,

$$\sin z^2 = (z - \sqrt{n\pi}) \frac{\sin z^2}{z - \sqrt{n\pi}}$$

$\sin z^2/(z - \sqrt{n\pi})$ è non nulla e ha una singolarità eliminabile per $z = \sqrt{n\pi}$

$$\lim_{z \rightarrow \sqrt{n\pi}} \frac{\sin z^2}{z - \sqrt{n\pi}} = \lim_{z \rightarrow \sqrt{n\pi}} \frac{2z \cos z^2}{1} = 2\sqrt{n\pi}(-1)^n$$

Poiché $(z - \sqrt{n\pi})^{1/2}$ ha un punto di diramazione in $z = \sqrt{n\pi}$, anche $\sqrt{\sin z^2}$ lo avrà. Quindi $f(z) = \sqrt{\sin z^2}$ ha punti di diramazione semplici in $z = \sqrt{n\pi}$ per $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Il punto all'infinito non è una singolarità isolata (e poiché non è neanche un polo, è una singolarità essenziale).

(5) Per trovare i punti di diramazione di

$$f(z) = \sqrt[3]{z^3 - z}$$

espandiamo $f(z)$,

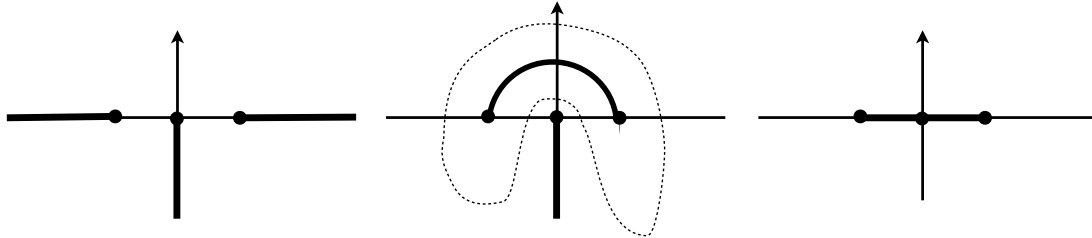
$$f(z) = z^{1/3}(z - 1)^{1/3}(z + 1)^{1/3}$$

³Si osservi che procediamo come per i poli nella lezione 5.1: fattorizziamo le radici della funzione in modo che quel che resta è analitico e non nullo.

Ci sono punti di diramazione di ordine 2 in $z = -1, 0, 1$. Facendo la sostituzione $z \mapsto 1/z$ si vede che non ci sono punti di diramazione all'infinito in quanto

$$F(z) = f(1/z) = \frac{1}{z}(1-z)^{1/3}(1+z)^{1/3}$$

Tre possibili tagli:

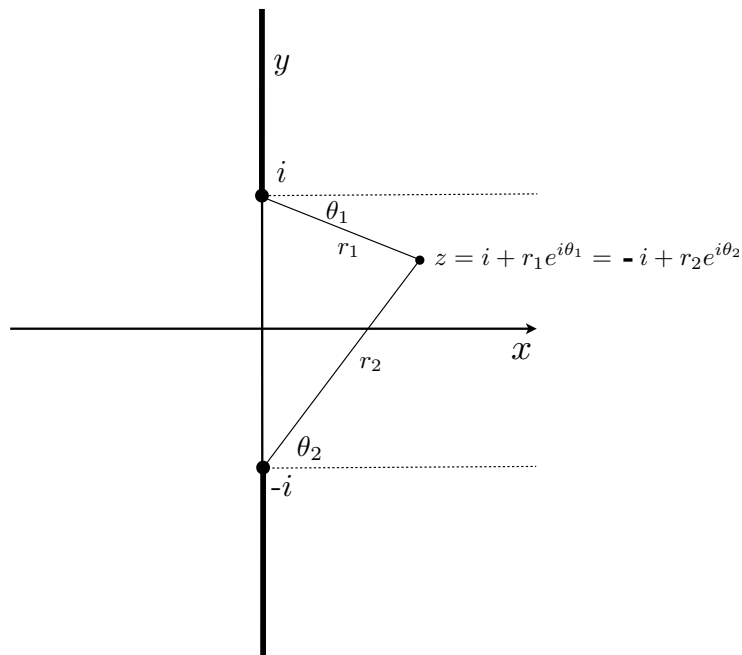


Si vede facilmente che il primo taglio va bene e trasforma la multifunzione in una funzione a un solo valore. Il secondo taglio **non** va bene perché permette un giro intorno ai punti ± 1 . Un giro intorno a questi due punti fa variare il valore di partenza della funzione di un fattore $e^{i4\pi/3}$, quindi la funzione così ottenuta non è a un sol valore. Il terzo taglio va bene: girando intorno ai tre tagli la funzione non cambia ($e^{i6\pi/3} = e^{i2\pi} = 1$).

(6) Per prima cosa fattorizziamo $f(z)$,

$$f(z) = (z-i)^{1/3}(z+i)^{1/3}.$$

Ci sono punti di diramazione (di ordine 2) in $z = \pm i$. Un modo di introdurre tagli è il seguente:



Da cui,

$$f(z) = (r_1 e^{i\theta_1})^{1/3} (r_2 e^{i\theta_2})^{1/3} = \sqrt[3]{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/3}$$

Si vuole determinare il ramo in cui

$$f(0) = \frac{1}{2} \left(-1 + i\sqrt{3} \right) = e^{i(2\pi/3+2\pi n)}$$

Deve quindi valere

$$\sqrt[3]{1} e^{i(\theta_1+\theta_2)/3} = e^{i(2\pi/3+2\pi n)}$$

cioè, per avere il ramo richiesto, gli angoli devono soddisfare la relazione

$$\theta_1 + \theta_2 = 2\pi + 6\pi n$$

Una scelta possibile è

$$\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \frac{5\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{3\pi}{2}$$

(7)

$$(a) \quad f(z) = \log(z^2 - 1) = \log(z - 1) + \log(z + 1)$$

Ci sono punti di diramazione in $z = \pm 1$. Per sapere che cosa succede all'infinito, consideriamo il comportamento nello zero di

$$F(z) = f(1/z) = \log\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) = \log(z^{-2}) + \log(1 - z^2)$$

$\log(z^{-2})$ ha un punto di diramazione in $z = 0$,

$$\log(z^{-2}) = \ln|z^{-2}| + i \arg(z^{-2}) = \ln|z^{-2}| - i2 \arg(z)$$

Ogni volta che giriamo intorno allo zero il valore della funzione $F(z)$ cambia di $-4\pi i$. Allora $z = \infty$ è un punto di diramazione di $f(z)$. Possiamo rendere la funzione ad un sol valore introducendo due tagli che partono da $z = \pm 1$ e vanno all'infinito.

$$(b) \quad f(z) = \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \log(z+1) - \log(z-1)$$

Ci sono punti di diramazione in $z = \pm 1$.

$$F(z) = f(1/z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$F(z)$ non ha punti di diramazione nello zero, quindi $f(z)$ non ha punti di diramazione all'infinito.

Possiamo rendere la funzione ad un sol valore introducendo due tagli che partono da $z = \pm 1$ e vanno all'infinito. Possiamo anche rendere la funzione ad un sol valore introducendo un solo taglio che collega i punti $z = \pm 1$. Questo perché $\log(z+1)$ e $-\log(z-1)$ cambiano rispettivamente di $2\pi i$ e $-2\pi i$ quando si percorre un giro completo intorno ai due punti di diramazione nella direzione positiva.