

SOLUZIONI 4.1

(1) Per essere analitica, la funzione $f = u + iv$ deve soddisfare le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}\partial_x u &= +\partial_y v \\ \partial_x v &= -\partial_y u\end{aligned}$$

E se queste sono soddisfatte le funzioni u e v devono essere **funzioni armoniche**, cioè essere entrambe soluzioni dell'equazione di Laplace nel piano. Questa proprietà si verifica facilmente:

$$\begin{aligned}\partial_x \partial_x u &= \partial_x \partial_y v = \partial_y \partial_x v = -\partial_y \partial_y u \\ \partial_x \partial_x v &= -\partial_x \partial_y u = -\partial_y \partial_x u = -\partial_y \partial_y v\end{aligned}$$

Quindi

$$\Delta u \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad e \quad \Delta v \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = 0$$

La funzione $u = x^2 + y^2$, non è armonica in quanto $\Delta u = 4$. Quindi non esiste alcuna scelta di v che renda la funzione $f(x + iy) = (x^2 + y^2) + iv$ analitica.

(2) È il momento di soffermarsi un pochino sui limiti di funzioni complesse. L'idea di base è i limiti di funzioni complesse si comportino come i limiti di funzioni reali. In particolare, se $\{z_n\}$ è una successione di punti nel piano complesso che converge al numero complesso a e se

$$\lim_{z_n \rightarrow a} f(z_n) = A, \quad \lim_{z_n \rightarrow a} g(z_n) = B,$$

allora

$$\begin{aligned}\lim_{z_n \rightarrow a} [f(z_n) + g(z_n)] &= A + B \\ \lim_{z_n \rightarrow a} [f(z_n)g(z_n)] &= AB \\ \lim_{z_n \rightarrow a} [f(z_n)/g(z_n)] &= A/B \quad \text{se } B \neq 0\end{aligned}$$

(a) Oggetto di questo esercizio è la funzione (per $z \neq 0$)

$$f(z) \equiv f(x + iy) = \frac{xy}{\bar{z}}$$

Viene chiesto di mostrare che $f(z)$ tende a 0 quando z tende verso qualunque punto dell'asse reale o dell'asse immaginario, inclusa l'origine. Si devono quindi determinare i limiti

$$\lim_{z \rightarrow s} \frac{xy}{\bar{z}}, \quad \lim_{z \rightarrow is} \frac{xy}{\bar{z}}$$

dove s è reale e, come di consueto, $z = x + iy$. In primo luogo, riscriviamo la funzione f in notazione complessa,

$$\frac{xy}{\bar{z}} = \frac{1}{4i} \frac{(z + \bar{z})(z - \bar{z})}{\bar{z}} = \frac{1}{4i} \frac{z^2 - \bar{z}^2}{\bar{z}} = \frac{1}{4i} \left[\frac{z^2}{\bar{z}} - \bar{z} \right]$$

Allora

$$\lim_{z \rightarrow s} \frac{xy}{\bar{z}} = \lim_{z \rightarrow s} \frac{1}{4i} \left[\frac{z^2}{\bar{z}} - \bar{z} \right] = \frac{1}{4i} \left[\lim_{z \rightarrow s} \frac{z^2}{\bar{z}} - \lim_{z \rightarrow s} \bar{z} \right] = s - s = 0.$$

Analogamente si trova

$$\lim_{z \rightarrow is} \frac{xy}{\bar{z}} = 0.$$

Risulta così verificato che $f(z)$ tende a 0 quando z tende verso qualunque punto dell'asse reale o dell'asse immaginario, inclusa l'origine.

(b) Poiché lungo gli assi $f = u + iv = 0$, sono nulli gli incrementi lungo x e lungo y di u e v a partire dall'origine, e quindi le loro derivate parziali in $z = 0$: le equazioni di Cauchy-Riemann sono banalmente soddisfatte.

(c) Consideriamo l'azione della trasformazione su un vettore δz (infinitesimo) applicato nell'origine, di lunghezza $\delta\rho$ e angolo ϕ . Allora

$$\delta z \mapsto \delta f = f(\delta z) = \frac{1}{4i} \left[\frac{(\delta z)^2}{\delta z} - \overline{\delta z} \right] = \frac{1}{4i} [\delta\rho e^{i3\phi} - \delta\rho e^{-i\phi}] = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i2\phi} - e^{-i2\phi}}{2i} \right] \delta\rho e^{i\phi} = \frac{1}{2} \sin(2\phi) \delta\rho e^{i\phi}$$

Questa non è una stiro-rotazione, non tanto per la rotazione, che c'è ed è l'identità, ma per lo stiramento $\frac{1}{2} \sin(2\phi)$, che non è uniforme. Si osservi che per $\phi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$, $\delta f = 0$, in accordo con (b).

In un primo momento, era stato chiesto di mostrare con i metodi dell'analisi reale che la funzione non è differenziabile nello zero. Magari qualcuno ha provato a farlo e vuole conoscere la risposta. Eccola. In primo luogo, riscriviamo la funzione f in notazione reale,

$$f(x + iy) = \frac{xy}{\bar{z}} = \frac{xy(x + iy)}{\bar{z}(x + iy)} = \frac{x^2y}{x^2 + y^2} + i \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = u + iv$$

Alla trasformazione complessa è associata la trasformazione $\mathbf{f} : (x, y) \mapsto (u, v)$ da \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 dove

$$u = \frac{x^2y}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}.$$

I differenziali di u e v sono dati da

$$\begin{aligned} du &= \partial_x u dx + \partial_y u dy \\ dv &= \partial_x v dx + \partial_y v dy \end{aligned}$$

e si arriva così alla matrice Jacobiana J , come esposto nella lezione 4.1. La differenziabilità reale in un punto corrisponde all'esistenza del differenziale in quel punto. E questa si realizza se le derivate parziali sono continue in quel punto. Questo non accade nel nostro caso. Consideriamo, per esempio, $\partial_x u$

$$\partial_x u = \frac{2xy(x^2 + y^2) - 2x(x^2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

Si verifica facilmente che $\partial_x u$ non è continua in $(0, 0)$ (si lascia allo studente di controllare le altre derivate parziali). Infatti, avvicinamenti a $(0, 0)$ lungo rette $y = mx$ diverse danno risultati diversi:

$$\partial_x u|_{y=mx} = \frac{2m^3x^4}{(x^2 + m^2x^2)^2} = \frac{2m^3}{(1 + m^2)^2}$$

e quindi la trasformazione \mathbf{f} non è differenziabile nell'origine.

La morale che se ne trae è che non basta che siano verificate le equazioni di Cauchy-Riemann in un punto affinché la funzione $f = u + iv$ sia analitica. Occorre anche che le derivate parziali di u e v siano continue. In effetti, la continuità delle derivate parziali di u e v e le equazioni di Cauchy-Riemann nella regione \mathcal{R} sono le condizioni necessarie e sufficienti affinché la funzione $f = u + iv$ sia analitica in \mathcal{R} . Si osservi che la presentazione della nozione di funzione analitica fatta in classe presupponeva questo fatto, cioè l'esistenza dei differenziali du e dv . La differenziabilità reale garantisce che la trasformazione locale $(dx, dy) \mapsto (du, dv)$ è ben definita. L'analiticità aggiunge a questo fatto il requisito che la trasformazione locale sia la composizione di uno stiramento e di una rotazione.

(3) Banale.

(4) Inversione complessa:

$$I(z = x + iy) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = u + iv$$

(a) Allora

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

(b) Calcoliamo le derivate parziali

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \frac{x^2 + y^2 - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_y u &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_x v &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_y v &= \frac{-(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Per $(x, y) \neq (0, 0)$, si ha $\partial_x u = \partial_y v$ e $\partial_y u = -\partial_x v$, che sono proprio le equazioni di Cauchy-Riemann. Per $(x, y) = (0, 0)$ le derivate parziali sono discontinue (verificare!): le equazioni di Cauchy-Riemann non valgono.

(c)

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

In coordinate polari $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ si ha

$$y^2 - x^2 = \rho^2(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = -\rho^2 \cos(2\theta), \quad 2xy = \sin(2\theta)$$

e quindi

$$J = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} \cos(\pi - 2\theta) & -\sin(\pi - 2\theta) \\ \sin(\pi - 2\theta) & \cos(\pi - 2\theta) \end{pmatrix}$$

che descrive uno stiramento di $1/\rho^2$ e una rotazione dell'angolo $\pi - 2\theta$.

(d)

$$\partial_x f = \partial_x u + i\partial_x v = \frac{y^2 - x^2 + i2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\rho^2 [-\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)]}{\rho^4} = -\frac{\cos(2\theta) - i\sin(2\theta)}{\rho^2}$$

da cui

$$\partial_x f = -\frac{1}{\rho^2} e^{-i2\theta} = -\frac{1}{\rho^2 e^{i2\theta}} = -\frac{1}{z^2}$$

che, naturalmente, coincide, con quanto si ottiene con le regole del calcolo

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z} \right) = -\frac{1}{z^2}.$$