

SOLUZIONI 5.1

(1) Per determinare il valore di

$$\int_C (12z^2 - 4iz) dz,$$

dove C è la linea $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ che congiunge i punti $(1, 1)$ e $(2, 3)$ si può: (i) calcolare l'integrale di linea lungo la curva data separando parte reale e parte immaginaria e applicando le regole di calcolo degli integrali di linea reali; (ii) osservare che, essendo la funzione integranda analitica, il valore dell'integrale non dipende dalla linea, quindi, invece di quella assegnata, si prende una linea molto più semplice che congiunge i due punti, per esempio una retta; fatto questo si calcola l'integrale di linea lungo il segmento di retta tra $(1, 1)$ e $(2, 3)$; (iii) osservare che, essendo la funzione integranda analitica, valgono le usuali regole del calcolo: la primitiva della funzione integranda è $4z^3 - 2iz^2$ e quindi

$$\int_C (12z^2 - 4iz) dz = \int_{1+i}^{2+3i} (12z^2 - 4iz) dz = (4z^3 - 2iz^2)|_{1+i}^{2+3i} = -156 + 38i$$

Chiaramente, (iii) è il metodo più furbo!

(2) (a) $C: |z| = 1$. Si ponga $z = e^{i\theta}$. Allora

$$\oint_C |z|^2 dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} de^{i\theta} = e^{i2\pi} - 1 = 0$$

(b) $|z - 1| = 1$. Si ponga $z = 1 + e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta} d\theta = (-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta$. Allora

$$\oint_C |z|^2 dz = \int_0^{2\pi} [(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta] (-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta = 2i\pi$$

(3) Calcolare

$$\int_C \bar{z}^2 dz + z^2 dz$$

lungo la curva C definita da $z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 = (2 - 2i)z + (2 + 2i)\bar{z}$ tra il punto $z = 1$ e $z = 2 + 2i$.

Risposta: $248/15$.

(4) (a)

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4)^2} = \frac{z}{[(z + 2i)(z - 2i)]^2}$$

È chiaro "a vista" che $2i$ e $-2i$ sono poli di ordine 2 (i poli sono gli zeri della funzione inversa). Questi due poli sono le sole singolarità e dunque la $f(z)$ è meromorfa.

(b)

$$f(z) = \sec(1/z) \equiv \frac{1}{\cos(1/z)}$$

Si hanno singolarità quando $\cos(1/z) = 0$, cioè in $1/z = (2n + 1)\pi/2$ o

$$z = \frac{2}{(2n + 1)\pi} \quad \text{dove } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Poiché $f(z)$ non è definita in $z = 0$ anche $z = 0$ è una singolarità.

Sulla base di quanto visto a lezione, rendiamo esplicita la regola che permette di decidere in generale se una singolarità è un polo di ordine m per una funzione analitica con singolarità in $z = a$.

Se a è un polo di ordine m , allora

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z) = b_m \quad \text{dove} \quad b_m \neq 0$$

Lo scopo del gioco è trovare m . Possiamo allora procedere per tentativi ed errori: Scegliamo noi k , per esempio $k = 1$, e consideriamo il limite $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z)$. Se a è un polo, ci sono tre possibilità

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z) = \begin{cases} c \neq 0 & \Rightarrow m = k & \Rightarrow b_m = c \\ 0 & \Rightarrow m < k \\ \infty & \Rightarrow m > k \end{cases}$$

A meno che non sia chiaro che $m > 1$, conviene applicare la regola partendo da $k = 1$. Nel calcolo del limite può essere d'aiuto la *regola di l'Hospital* per funzioni analitiche, che è la stessa dell'analisi reale: se $f(z)$ e $g(z)$ sono analitiche in una regione che contiene a e $f(a) = g(a) = 0$, ma $g'(a) \neq 0$, allora

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

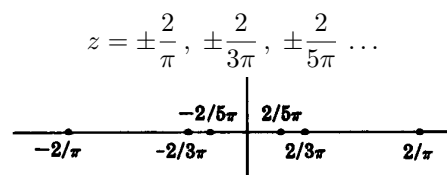
Ritorniamo alla $f(z)$ del problema. Partiamo con $k = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 2/[(2n+1)\pi]} \left[z - \frac{2}{(2n+1)\pi} \right] f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2/[(2n+1)\pi]} \frac{z - 2/[(2n+1)\pi]}{\cos(1/z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2/[(2n+1)\pi]} \frac{1}{-\sin(1/z)(-1/z^2)} \quad (\text{Hospital}) \\ &= \frac{\{2/[(2n+1)\pi]\}^2}{\sin[(2n+1)\pi/2]} \\ &= \frac{4(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} \neq 0 \end{aligned}$$

Quindi le singolarità

$$z = \frac{2}{(2n+1)\pi} \quad \text{dove} \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

sono poli di ordine uno, cioè poli semplici. Si osservi che questi poli sono sull'asse reale in



Ciascuno di questi può essere circondato da un cerchio di raggio δ , e quindi questi punti sono singolarità isolate (come deve essere per un polo); naturalmente, δ diventa sempre più piccolo man mano che ci si avvicina allo zero. Ma lo zero non ha questa proprietà: non esiste alcun cerchio di raggio δ , centrato nello zero, all'interno del quale non ci siano singolarità della funzione. Lo zero non è una singolarità isolata, è una singolarità essenziale. Equivalentemente, potremmo applicare la regola nel quadro sopra e verificare che non esiste alcun k tale $\lim_{z \rightarrow 0} z^k f(z) = c$,

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^k \frac{1}{\cos(1/z)} = \infty, \quad \forall k$$

(c)

$$f(z) = \frac{\ln(z-2)}{(z^2+2z+2)^2}$$

Il punto $z = 2$ è un punto di diramazione ed è una singolarità isolata. Le radici di (z^2+2z+2) sono $z = -1 \pm i$, da cui $z^2+2z+2 = (z+1+i)(z+1-i)$. Quindi $z = -1 \pm i$ sono poli di ordine 2 (che sono singolarità isolate).

(d)

$$f(z) = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

A prima vista, sembra che $z = 0$ sia un punto di diramazione. Per verifica, sia $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2\pi)}$, dove $0 \leq \theta < 2\pi$.

Se $z = re^{i\theta}$, si ha

$$f(z) = \frac{\sin(\sqrt{r}e^{i\theta/2})}{\sqrt{r}e^{i\theta/2}}$$

Se $z = re^{i(\theta+2\pi)}$, si ha

$$f(z) = \frac{\sin(\sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{\pi i})}{\sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{\pi i}} = \frac{\sin -(\sqrt{r}e^{i\theta/2})}{-\sqrt{r}e^{i\theta/2}} = \frac{\sin(\sqrt{r}e^{i\theta/2})}{\sqrt{r}e^{i\theta/2}}$$

Quindi, in realtà, la funzione è a un sol valore e $z = 0$ non può quindi essere un punto di diramazione. Poiché

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 1,$$

ne segue che $z = 0$ è una singolarità eliminabile.

(5) Si deve calcolare

$$\oint_C f(z) dz$$

dove

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2} = \frac{e^z}{(z - i\pi)^2(z + i\pi)^2}$$

e C è il cerchio $|z| = 4$. La funzione $f(z)$ ha due poli $z = \pm i\pi$ di ordine $m = 2$ nel cerchio C . Quindi

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f, +i\pi) + \text{Res}(f, -i\pi)]$$

Ricordiamo la formula generale per il residuo in un polo a di ordine m ,

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d}{dz} \right]^{m-1} [(z-a)^m f(z)] \Big|_{z=a}$$

Per $a = i\pi$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i\pi) &= \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dz} \right] \left[(z - \pi i)^2 \frac{e^z}{(z - i\pi)^2(z + i\pi)^2} \right] \Big|_{z=i\pi} = \frac{d}{dz} \frac{e^z}{(z + i\pi)^2} \Big|_{z=i\pi} \\ &= \frac{e^z(z + i\pi)^2 - e^z[2(z + i\pi)]}{(z + i\pi)^4} \Big|_{z=i\pi} = \frac{e^z(z + i\pi) - 2e^z}{(z + i\pi)^3} \Big|_{z=i\pi} = \frac{\pi + i}{4\pi^3} \end{aligned}$$

Analogamente, si trova

$$\text{Res}(f, -i\pi) = \frac{\pi - i}{4\pi^3}$$

Allora

$$\oint_C \frac{e^z dz}{(z^2 + \pi^2)^2} = 2\pi i [\text{Res}(f, +i\pi) + \text{Res}(f, -i\pi)] = 2\pi i \left[\frac{\pi + i}{4\pi^3} + \frac{\pi - i}{4\pi^3} \right] = \frac{i}{\pi}$$

(6) Calcolare

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz$$

dove C è il cerchio $|z| = 2$. Capito il metodo, non è necessario essere sempre pedanti:

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} (e^{iz})''|_{z=0} = -\pi i$$

(7) Dimostrare che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \sin t$$

per $t > 0$ e C il cerchio $|z| = 3$.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{(z+i)(z-i)} dz = \frac{e^{-it}}{-2i} + \frac{e^{it}}{2i} = \sin t$$

(8) Calcolare

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{z^2 - 1} dz$$

lungo un rettangolo con vertici in: (a) $2 \pm i, -2 \pm i$; (b) $-i, 2 - i, 2 + i, i$.

Risposta: (a) 0, (b) $-1/2$.

(9) Siano

$$P(z) = \frac{1}{\cos z}, \quad Q(z) = \frac{\cos z}{z^2}, \quad R(z) = \frac{1}{(e^z - 1)^3}.$$

Trovare i poli di P , Q e R e il loro ordine.

Risposta: se siete arrivati sin qui, non avete problemi a trovarla.