

SOLUZIONI 7.2

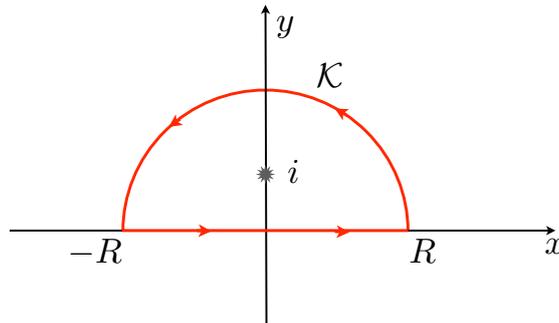
(1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3}$$

Polo triplo in i

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2} \frac{12}{(z+i)^5} = -\frac{3i}{16}$$



$$\oint f(z)dz = \int_{-R}^R \frac{dx}{(1+x^2)^3} + \int_{\mathcal{K}} \frac{dz}{(1+z^2)^3} = 2\pi i \text{Res}(f, i) = \frac{3\pi}{8}$$

Nel limite $R \rightarrow \infty$ l'integrale lungo \mathcal{K} dà contributo nullo, quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3\pi}{8}$$

(2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(a+bx^2)^4} = \frac{\pi}{16a^{3/2}b^{5/2}}, \quad a, b > 0$$

Polo di quart'ordine in $i\sqrt{a/b}$.

(3)

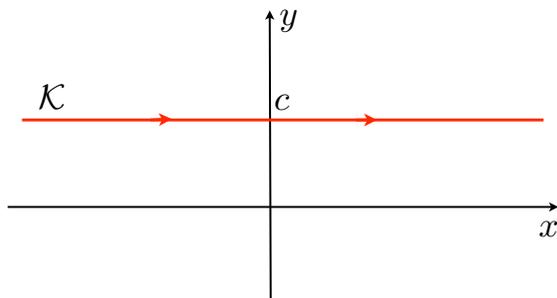
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x}, \quad 0 < a < 1$$

La funzione

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

ha poli per $z = (2n+1)\pi i$. È dunque impossibile usare il contorno della figura dell'esercizio (1). L'idea per risolvere questo integrale (e integrali simili) è di trovare un cammino chiuso tale che su una parte del cammino l'integrale sia riconducibile a quello sull'asse reale che si vuole calcolare, e tale che le altre parti del cammino chiuso diano contributo nullo in un limite opportuno.

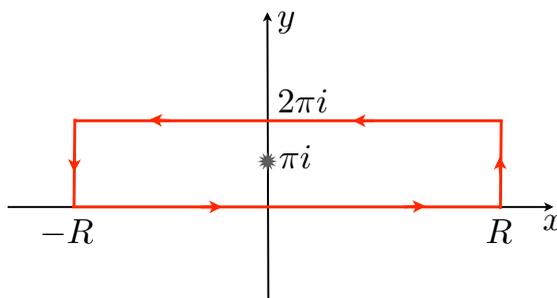
Mi spiego: consideriamo l'integrale lungo la retta \mathcal{K} di equazione $y = c$ nel piano complesso, dove c è una costante, diciamo positiva.



Allora $z = x + ic$ e quindi

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{e^{az}}{1+e^z} dz = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iac} e^{ax}}{1+e^{iac} e^{ax}} dx = e^{iac} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{ic} e^x} dx$$

Ci siamo quasi! Basta infatti scegliere $c = 2\pi$, e la funzione integranda diventa identica alla funzione $f(z)$ in quanto $e^{i2\pi} = 1$. Possiamo allora scegliere il cammino



e ottenere

$$\int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x} + \int_{y=0}^{2\pi} \frac{e^{aR} e^{iy}}{1+e^R e^{iy}} idy - e^{ia2\pi} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x} - \int_{y=0}^{2\pi} \frac{e^{-aR} e^{iy}}{1+e^{-R} e^{iy}} idy = 2\pi i \text{Res}(f, \pi i)$$

Calcoliamo il residuo nel polo semplice πi ,

$$\text{Res}(f, \pi i) = \lim_{z \rightarrow \pi i} (z - \pi i) \frac{e^{az}}{1+e^z} = \frac{1}{e^{\pi i}} e^{a\pi i} = -e^{a\pi i}.$$

Osserviamo che il modulo della funzione integranda del primo integrale in dy è minore di¹

$$\frac{e^{aR}}{e^R - 1}$$

e quindi tende a zero per $R \rightarrow \infty$ ($a < 1$) e che il modulo della funzione integranda del secondo integrale in dy è minore di

$$\frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}}$$

e quindi tende a zero per $R \rightarrow \infty$. Allora, passando al limite $R \rightarrow \infty$,

$$(1 - e^{ia2\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x} = 2\pi i (-e^{a\pi i}),$$

¹ $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$, cioè la lunghezza di un lato di un triangolo è sempre maggiore o uguale alla differenza degli altri due.

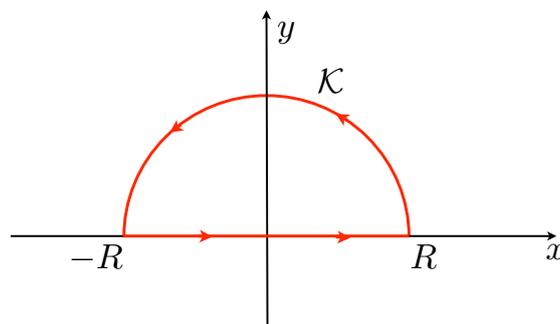
da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x} = \pi \frac{-2ie^{a\pi i}}{1-e^{ia2\pi}} = \frac{2i\pi}{e^{a\pi i} - e^{-i2\pi}} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

(4)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

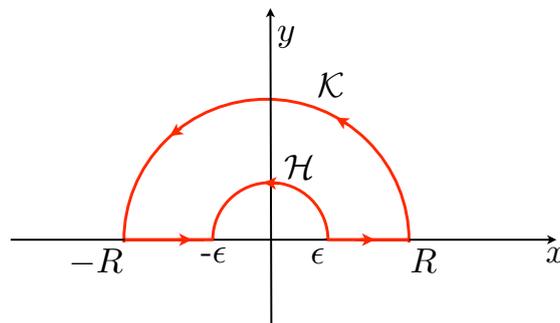
In integrali di questo tipo (integrali estesi all'infinito di funzioni trigonometriche divise per polinomi), il trucco è di passare dalla funzione trigonometrica all'esponenziale e poi ritornare all'integrale iniziale usando le definizioni delle funzioni trigonometriche in termini di esponenziale. Passiamo quindi a $f(z) = e^{iz}/z$. Poichè la $\sin x/x$ è pari, l'integrale richiesto sarà metà del valore dell'integrale da $-\infty$ a $+\infty$. La prima idea che viene in mente è di considerare, come nell'esercizio (1), il cammino



Nel limite $R \rightarrow \infty$, non c'è contributo dal cammino sul semicerchio \mathcal{K} dove $z = Re^{i\theta}$. Infatti, si ha

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{Re^{i\theta}} e^{iR\cos\theta - R\sin\theta} iRe^{i\theta} d\theta = i \int_0^{\pi} e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta} d\theta$$

e il modulo di quest'integrale va a zero per $R \rightarrow \infty$. Tuttavia, c'è un problema: la singolarità $z = 0$ è sul cammino. Il trucco (che si applica ad una miriade di altri problemi simili a questo) è quello di aggirare la singolarità con un giretto di raggio ϵ attorno ad essa (e preoccuparci alla fine di $\epsilon \rightarrow 0$). Passiamo quindi al cammino chiuso



Allora, poichè non ci sono singolarità dentro il cammino

$$\oint \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\mathcal{H}} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\mathcal{K}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

Poniamo a 0 l'ultimo termine, avendo già mostrato che per $R \rightarrow \infty$ non dà contributo. Facciamo la sostituzione da $-x$ a x nel primo integrale a secondo membro e combiniamo con il terzo. Otteniamo così

$$2i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx = - \int_{\mathcal{H}} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

Calcoliamo l'integrale a secondo membro ponendo $z = \epsilon e^{i\theta}$

$$- \int_{\mathcal{H}} \frac{e^{iz}}{z} = i \int_0^{\pi} e^{i\epsilon e^{i\theta}} d\theta \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} i\pi$$

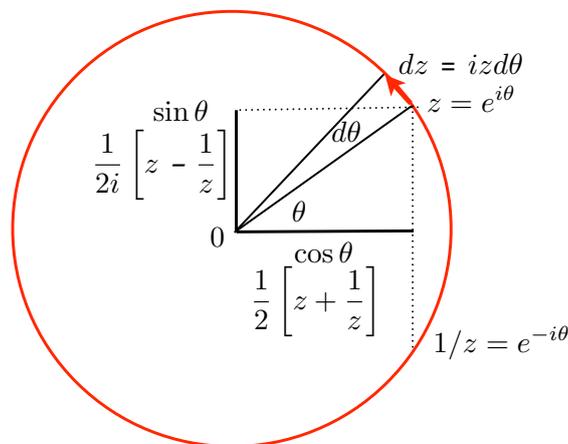
e quindi

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi i}{2i} = \frac{\pi}{2}$$

(5)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta}$$

Integrali di questo tipo si riconducono a integrali nel piano complesso mediante le sostituzioni riassunte dalla seguente figura del disco unitario



$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta} = \oint_C \frac{dz/iz}{3 - 2(z + z^{-1})/2 + (z - z^{-1})/2i} = \oint_C \frac{2dz}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$$

I poli di

$$f(z) = \frac{2}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$$

sono poli semplici, $z = 2 - i$ e $z = (2 - i)/5$. Solo $(2 - i)/5$ è all'interno di C . Il residuo in $(2 - i)/5$ è $1/(2i)$, quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta} = \pi$$

(6)

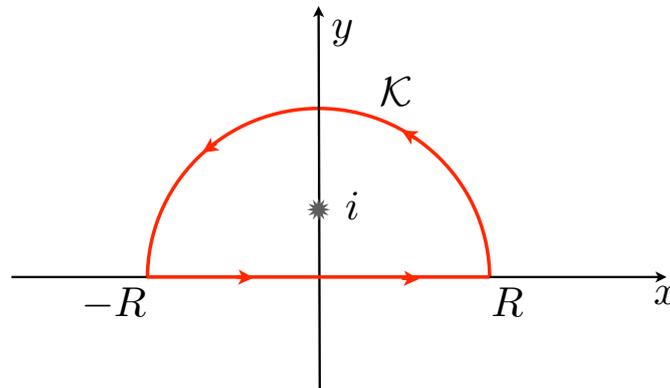
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx, \quad -\infty < k < +\infty$$

Un integrale di questo tipo, con la funzione integranda $= g(x) \times e^{-ikx}$, è detto integrale di Fourier. Se impariamo a risolvere questo integrale, impariamo tecniche che sono utili per calcolare altri integrali di questo tipo.

La funzione

$$f(z) = \frac{e^{-ikz}}{1+z^2}$$

ha due poli semplici in $+i$ e $-i$. Proviamo lo stesso cammino dell'esercizio (1):



Se l'integrale lungo \mathcal{K} va a zero per R che va all'infinito, siamo a posto. Consideriamo questo integrale, $z = Re^{i\theta}$,

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz = \int_0^\pi \frac{1}{1+R^2 e^{2i\theta}} e^{-ikR \cos\theta + kR \sin\theta} i R e^{i\theta} d\theta$$

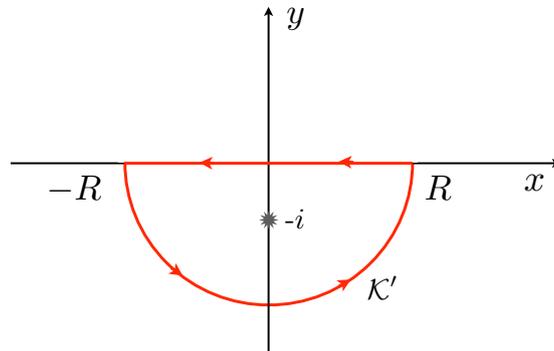
La situazione è analoga a quella incontrata nell'esercizio (4), ma c'è un ma: il modulo di questo integrale va a zero per R che va all'infinito se e solo se k è un numero negativo e, solo in questo caso, possiamo calcolare l'integrale. Il residuo in i vale

$$(z-i) \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} \Big|_{z=i} = \frac{e^k}{i+i} = \frac{e^k}{2i}$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^k, \quad \text{per } k < 0$$

Che fare per $k > 0$? Con un momento di riflessione, ci si può convincere che l'integrale su semicerchio va a zero consideriamo il cammino con il semicerchio rovesciato



Infatti, adesso si avrà

$$\int_{\mathcal{K}'} \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz = \int_{-\pi}^0 \frac{1}{1+R^2 e^{2i\theta}} e^{-ikR\cos\theta + kR\sin\theta} iR e^{i\theta} d\theta$$

Essendo adesso $\sin\theta$ è sempre negativo per $\pi < \theta < 0$, per k positivo, il modulo dell'integrale va a zero per R che va all'infinito.

Il cammino \mathcal{K}' racchiude l'altra singolarità della funzione, il polo semplice $-i$. Il residuo della funzione in $-i$ vale $e^{-k}/(-2i)$. Prestando attenzione al fatto che la parte del cammino \mathcal{K}' sull'asse reale ha verso opposto a quello dell'integrale che si vuole calcolare, concludiamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-k}, \quad \text{per } k > 0$$

In conclusione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|k|}.$$