

9.1

Il problema di Keplero del moto di un corpo di massa m in un campo centrale $-k/r$ può essere risolto in termini di variabili azione-angolo. Risolvendo l'equazione di Hamilton-Jacobi in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) , e separando le variabili, si ottiene una forma integrale delle variabili d'azione J_ϕ, J_θ e J_r . Per la variabile d'azione radiale si trova

$$J_r = \oint p_r dr = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{(J_\theta + J_\phi)^2}{4\pi^2 r^2}} dr \quad (\star)$$

dove E è l'energia, assunta negativa (stato legato), l'integrazione è su un'orbita con perielio r_1 e afelio r_2 . L'interesse in questo integrale sta nel fatto che se riusciamo ad esprimere l'energia E in termini delle variabili d'azione, cioè se determiniamo l'hamiltoniana $H = E$ in funzione di J_ϕ, J_θ e J_r , possiamo determinare le frequenze del moto, sulla base dell'equazione

$$\nu_i = \frac{\partial H}{\partial J_i}$$

Sommerfeld, che contribuì molto allo sviluppo della “vecchia” meccanica quantistica *à la* Bohr, basata su condizioni di quantizzazione $\oint p_i dq_i = n_i h$ per gli integrali d'azione, risolse l'integrale (\star) , con i metodi dell'analisi complessa.

- (1) Siete in grado di fare altrettanto? (Come aiuto, vi dico che perielio e afelio sono punti di diramazione e conviene prendere un taglio tra di loro e ...)
- (2) Fatto questo, dovrete poter verificare che c'è una sola frequenza del moto e che il periodo del moto è dato da

$$T = \pi k \sqrt{\frac{m}{-2E^3}}$$