

SOLUZIONI 9.2

(1a) Per mostrare che

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x + a) + \delta(x - a)]$$

è utile avere un'idea di come sono fatte le approssimanti regolari della funzione generalizzata

$$\eta(x) = \delta(x^2 - a^2).$$

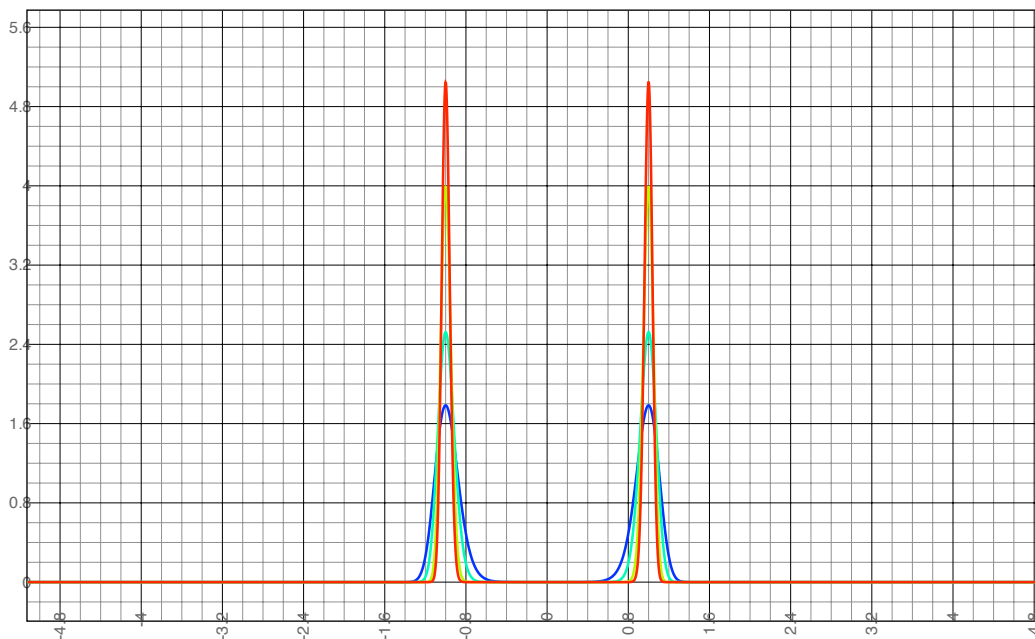
Se

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2},$$

allora le approssimanti di η_n sono

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x^2 - a^2)^2}$$

Ecco un grafico per $n = 10, 20, 50, 80$ e $a = 1$:



Il grafico mostra che le approssimanti sono sostanzialmente la somma di due funzioni che si concentrano una in $-a$ e l'altra in $+a$, il che rende già plausibile la formula che si vuole dimostrare. Occorre capire il fattore moltiplicativo $\frac{1}{2|a|}$ e darne una dimostrazione analitica. Consideriamo

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x^2 - a^2)^2} = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x-a)^2(x+a)^2}$$

Nell'intorno di $x = a$ si ha

$$\eta_n(x) \approx \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x-a)^2(2a)^2} = \frac{1}{2|a|} \sqrt{\frac{2a^2n}{\pi}} e^{-n(x-a)^2(2a)^2}$$

L'ultimo passaggio è stato fatto per isolare un'approssimante di $\delta(x - a)$ (vedere risposta al quesito (2) sotto). Dunque, nell'intorno di $x = a$,

$$\eta_n(x) \approx \frac{1}{2|a|} \sqrt{\frac{2a^2n}{\pi}} e^{-n(x-a)^2(2a)^2} = \frac{1}{2|a|} \delta_n(x - a).$$

Analogamente, nell'intorno di $x = -a$,

$$\eta_n(x) \approx \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x+a)^2(-2a)^2} = \frac{1}{2|a|} \sqrt{\frac{2a^2n}{\pi}} e^{-n(x+a)^2(2a)^2} = \frac{1}{2|a|} \delta_n(x + a)$$

Al crescere di n , $\eta_n(x)$ va rapidamente a zero ad eccezione di piccoli intorno di $x = a$ e $x = -a$ dove è dato da quanto calcolato sopra. Dunque, per n grande,

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x^2-a^2)^2} \approx \frac{1}{2|a|} [\delta_n(x + a) + \delta_n(x - a)]$$

Passando al limite $n \rightarrow \infty$ si ottiene quanto si voleva dimostrare.

* * *

Nota. In maniera analoga a quanto appena visto, si può comprendere la formula generale

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$$

dove x_i sono gli zeri di $f(x)$ e f è tale che la sua derivata f' non si annulla negli zeri x_i . Detta $\eta(x)$ la funzione generalizzata $\delta(f(x))$ e $\eta_n(x)$ la sua approssimate regolare

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(f(x))^2},$$

consideriamo $\eta_n(x)$ nell'intorno di uno zero x_i di $f(x)$. Sviluppiamo $f(x)$ nell'intorno di x_i . Poichè n è arbitrariamente grande teniamo solo l'ordine più basso in x . Allora, essendo $f(x_i) = 0$, si ha

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nf'(x_i)^2(x-x_i)^2} = \frac{1}{|f'(x_i)|} \sqrt{\frac{nf'(x_i)^2}{\pi}} = \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta_n(x - x_i)$$

* * *

Al di fuori di piccoli intorno degli zeri, $\eta_n(x)$ sarà praticamente nulla e quindi, sommando i contributi da tutti gli intorno,

$$\eta_n(x) = \delta(f(x)) \approx \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta_n(x - x_i).$$

Passando al limite $n \rightarrow \infty$ si ottiene la formula desiderata.

* * *

(1b) $x\delta(x) = 0$ discende immediatamente da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{nx^2}{\pi}} e^{-nx^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{y^2}{\pi}} e^{-y^2} = 0$$

(1c) Diamo una dimostrazione generale per il calcolo della delta in un sistema di coordinate curvilinee in \mathbb{R}^n . Sia

$$\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}$$

la rappresentazione di \mathbf{r} in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in \mathbb{R}^n e sia

$$\mathbf{r} = (\xi_1, \dots, \xi_n) = \boldsymbol{\xi}$$

la sua rappresentazione in un sistema di coordinate curvilinee. Sia

$$J = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right|$$

il determinante Jacobiano della trasformazione da \mathbf{x} a $\boldsymbol{\xi}$.

La delta in coordinate curvilinee è definita da

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_{(\boldsymbol{\xi})}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0) f(\boldsymbol{\xi}) d^n \boldsymbol{\xi} = f(\boldsymbol{\xi}_0)$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \delta_{(\boldsymbol{\xi})}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0) f(\boldsymbol{\xi}) d^n \boldsymbol{\xi} &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) \frac{d^n \boldsymbol{\xi}}{d^n \mathbf{x}} d^n \mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) J^{-1} d^n \mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0) f(\boldsymbol{\xi}) J^{-1} d^n \boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\delta_{(\boldsymbol{\xi})}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0) = J^{-1} \delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0) = J^{-1} \prod_i^n \delta(\xi_i - \xi_{0i})$$

Per il caso specifico di coordinate cilindriche in \mathbb{R}^3 , il determinante Jacobiano da coordinate cartesiane è r e quindi

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(z - z_0)$$

che è quanto si voleva dimostrare.

(2) Per quanto banale, la successione

$$\sqrt{\frac{An}{\pi}} e^{-Anx^2},$$

dove A è una costante è diversa da quella vista a lezione, e ci è anche servita a risolvere l'esercizio (1a).