

10.1

A lezione è stato mostrato che

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

la funzione $\hat{f}(k)$ è detta *trasformata di Fourier* di

$$f(x) = e^{-ax^2}$$

In una precedente lezione, la funzione delta di Dirac è stata definita come la funzione generalizzata associata alle successione regolare di funzioni buone

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$$

Si assuma, come sembra del tutto naturale, che la trasformata di Fourier di una funzione generalizzata $f(x)$, definita dalla successione regolare di funzioni buone $f_n(x)$, sia definita dalla successione delle trasformate di Fourier delle funzioni $f_n(x)$.
Domande:

- (1) Qual è la successione $\hat{\delta}_n(k)$ delle trasformate di Fourier delle $\delta_n(x)$
- (2) La successione $\hat{\delta}_n(k)$ è regolare?
- (3) Qual è la trasformata di Fourier $\hat{\delta}(k)$ di $\delta(x)$? Individuare la funzione generalizzata in termini dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\delta}(k) F(k) dk$$

per qualunque funzione buona $F(k)$.

- (4) Potete esprimere $\hat{\delta}(k)$ mediante una funzione “normale” (cioè non generalizzata)?