

10.1

Con le convenzioni per la trasformata di Fourier adottate per l'esercizio,

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}},$$

e definita la funzione delta di Dirac come la funzione generalizzata associata alle successione regolare di funzioni buone

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2},$$

si ha

(1)

$$\hat{\delta}_n(k) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{n}} e^{-\frac{k^2}{4n}} = e^{-\frac{k^2}{4n}}$$

(2) La successione $\hat{\delta}_n(k)$ è regolare e il limite è 1.

(3) 1 è la trasformata di Fourier $\hat{\delta}(k)$ di $\delta(x)$, cioè

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot F(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) dk$$

per qualunque funzione buona $F(k)$.

(4) $\hat{\delta}(k)$ è una funzione “normale”, la funzione $f(k) = 1$ (che, nella terminologia adottata a lezione, è una funzione “abbastanza buona”).